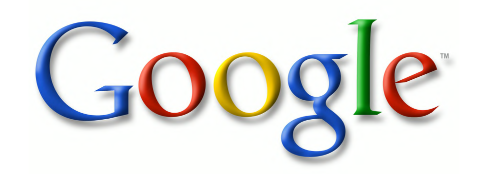


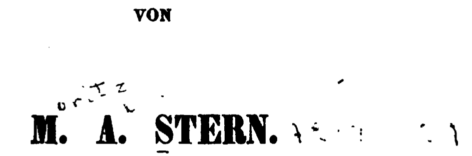


# LEHRBUCH

DER

# ALGEBRAISCHEN ANALYSIS

VON



M. A. STERN.

LEIPZIG UND HEIDELBERG.
C. F. WINTER'SCHE VERLAGSHANDLUNG.
1860.

# Vorrede.

Mit dem Erscheinen von Cauchy's algebraischer Analysis hat eine neue Epoche in der Behandlung dieses Theils der Mathematik begonnen. Die Darstellungsweise, welche diese Schrift charakterisirt, ist für die späteren Bearbeiter der Analysis durchaus massgebend geworden. In der That hat zuerst Cauchy in vielen Beziehungen eine Schärfe der Begriffsbestimmungen und eine Gründlichkeit der Beweise angestrebt, deren Nothwendigkeit erst die neuere Entwickelung der Mathematik zum klaren Bewusstseyn gebracht hatte, und die man in älteren Behandlungen der Analysis, wie namentlich in Euler's klassischem Werke *introductio in analysin infinitorum*, noch nicht findet.

Andererseits herrscht in Cauchy's Darstellung eine Künstlichkeit, welche dem Leser fortwährend die Ueberzeugung aufdrängt, dass auf diesem Wege die bewiesenen Wahrheiten nicht gefunden worden sind. Gewiss hat jeder Lehrer die Erfahrung gemacht, wie schwer es dem Lernenden fällt sich in diese Darstellung hinein zu arbeiten, und dass, wo es geschehen, sich doch, und zwar vorzugsweise bei wissenschaftlichen Köpfen, keine Befriedigung einstellt. Sieht man sich auch gezwungen das Bewiesene als ein mathematisches Kunststück zuzugeben, so vermisst man durchaus den natürlichen Zusammenhang der aufeinanderfolgenden Entwickelungen. Cauchy's Darstellung hat hierin eine gewisse Aehnlichkeit mit der Euklidischen und bildet einen schroffen Gegensatz zu der einfachen und durchsichtigen Behandlung in dem vorher erwähnten Werke Euler's.

Hätte Cauchy die überall angestrebte Gründlichkeit auch wirklich überall erreicht, so müsste man die Künstlichkeit der Darstellung so lange ertragen, als es keine ebensogründliche aber einfachere Behandlungsweise gäbe. Dem ist aber nicht

so. Cauchy's Analysis beruht — um nur dies eine hervorzuheben — in ihren wesentlichsten Theilen auf einem Satze, dessen Unrichtigkeit (wenigstens in der Allgemeinheit in welcher ihn Cauchy ausspricht) längst anerkannt ist. Ich meine den Lehrsatz (Kap. 6 §. 1) nach welchem, wenn die Glieder einer Reihe Funktionen einer Veränderlichen $x$ sind, und zwar stetige Funktionen in der Nähe eines gewissen Werthes, für welchen die Reihe convergirt, auch die Summe der Reihe in der Nähe dieses Werthes, eine stetige Funktion von $x$ ist. Giebt man diesen Satz zu, so folgt daraus allerdings, dass wenn man durch $\varphi m$ den Werth der Binomialreihe $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$ bezeichnet, indem man das reelle $x$ zwischen $-1$ und $+1$, oder $x = z(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ gesetzt, $z$ zwischen $-1$ und $+1$ nimmt, $\varphi m$ eine stetige Funktion von $m$ ist. Nimmt man dann den Satz zu Hülfe, dass, wenn $\varphi m$ eine stetige Funktion von $m$ ist und die Gleichung $\varphi m . \varphi m' = \varphi(m + m')$ statt hat, auch $\varphi m = (\varphi 1)^m = (1 + x)^m$, so ergiebt sich daraus der Werth der Binomialreihe auf eine unzweideutige Weise, sowohl für ein reelles als für ein complexes $x$, wie dies Cauchy ausführlich erörtert hat.

Die Unrichtigkeit des erwähnten Satzes hat aber schon Abel nachgewiesen (Crelle Journal f. d. Math. Bd. 1 p. 316), in einem Aufsatze, welcher die Umrisse einer neuen Bearbeitung dieses Theils der Analysis enthält. Diese ebenso originelle als inhaltreiche Arbeit des grossen Mathematikers hätte jedenfalls, wenn auch Einiges zu erinnern seyn möchte, mehr Berücksichtigung bei späteren Bearbeitungen der Analysis verdient, als ihr geworden zu seyn scheint. Man hat nemlich in den bekannteren Werken über Analysis, welche nach dieser Zeit in Deutschland erschienen sind, statt zu untersuchen, ob nicht der erwähnte Cauchy'sche Satz unter gewissen Beschränkungen beibehalten werden kann, denselben vielmehr ganz entfernt, im Uebrigen aber Cauchy's Darstellung unverändert beibehalten. Man scheint also diesen Satz als eine blosse Verzierung angesehen zu haben, die man ohne Gefährdung des analytischen Baues auch wegnehmen könne, und hat

nicht bemerkt, dass es sich um eine Grundmauer handelte, die man nicht entfernen konnte, ohne den grössten Theil des Gebäudes in die Luft zu stellen. Hat man nemlich nicht zuerst bewiesen, dass $\varphi m$ eine stetige Grösse ist, so lässt sich auch aus der Gleichung $\varphi m = (1 + x)^m$ der Werth von $\varphi m$ nicht ableiten, da $(1 + x)^m$, sobald $m$ ein Bruch $= \frac{p}{q}$ ist, wenn es sich um reelle Werthe handelt, sobald $q$ gerade ist, zwei Werthe ausdrückt, wenn aber auch imaginäre Werthe zulässig sind, $q$ verschiedene Werthe bezeichnen kann, so dass es ganz unentschieden bleibt, welche dieser $q$ Grössen den wahren Werth von $\varphi m$ ausdrückt.

Oder, um dies von einer anderen Seite darzustellen, sucht man, nach Cauchy, die Summe der Reihe

$$1 + mz(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) + \frac{m.m-1}{1.2} z^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) + \ldots$$

welche, nach seinem erwähnten Satze, zwischen $z = -1$ und $z = 1$ eine stetige Funktion von $z$ ist, so findet man dafür den Werth $(1 + 2z\cos\vartheta + z^2)^{\frac{m}{2}} \,.\, (\cos mt + i\sin mt)$, wo $t$ durch die Formel $t = s \pm 2k\pi$ gegeben ist, in welcher $s = \operatorname{arc\,tg} \frac{z\sin\vartheta}{1 + z\cos\vartheta}$ und $k$ eine ganze Zahl ist, die nur von $z$ und $\vartheta$ abhängen kann. Insofern aber die Reihe eine stetige ist, muss, wie Cauchy weiter schliesst, der Werth von $t$ mit $z$ zugleich unmerklich zu und abnehmen, und es muss daher $t = s \pm 2k\pi$ ebenfalls eine stetige Funktion von $z$ seyn. Da aber $s$ sich stetig mit $z$ ändert, während $k$ sich nur sprungweise ändern kann, so kann $t$ nur dann stetig seyn, wenn $k$ constant ist, d. h. $k$ ist von $z$ unabhängig, und kann daher bestimmt werden, indem man $z = 0$ setzt, woraus $k = 0$ folgt. Dies ist Cauchy's Schlussfolge (Kap. 9 §. 2), welche vollkommen consequent ist, sobald man die Stetigkeit der Reihe zugiebt. In neueren Werken wird aber, ohne dass von Stetigkeit der Reihe die Rede ist, aus dem Umstande, dass für $z = 0$ auch $k = 0$ ist, geschlossen, dass allgemein $k = 0$ seyn muss, was durchaus unrichtig ist, da $k$ eine Funktion von $z$ seyn könnte. Und so bleibt der grösste Theil der Analysis, insofern er auf der Werthbestimmung der binomischen Reihe beruht, unbewiesen.

Wäre es meine Absicht eine Kritik der bisherigen Behandlungen der Analysis zu geben, so liessen sich noch mehr Beispiele einer solchen nur scheinbaren Gründlichkeit anführen. Das Gesagte wird aber genügen um zu zeigen, dass, rücksichtlich der strengen Beweisführung, die neueren Lehrbücher der Analysis nicht so hoch über den älteren stehen, als ein grosser Theil des mathematischen Publikums zu glauben scheint.

Ich habe, in der folgenden Bearbeitung der Analysis, den Versuch gemacht, wieder zu einer natürlicheren und einfacheren Behandlung zurückzukehren, ohne die Strenge der Beweisführung aufzugeben. Ich setze eine wissenschaftlich entwickelte Arithmetik voraus, und fasse die Aufgabe der Analysis so auf, dass sie das Zwischenglied zwischen Arithmetik und Differentialrechnung bildet, indem sie die Untersuchungen der Arithmetik von bestimmten Zahlen auf allgemeinere Formen zu übertragen hat, soweit dies geschehen kann, ohne auf den Begriff der Stetigkeit einzugehen, mit dessen Einführung die Differentialrechnung beginnt. Bringt man den Begriff der Stetigkeit schon in den ersten Betrachtungen der Analysis an, wie es Cauchy thut, so ist es gewiss viel besser, diesen Begriff auch vollständig zu entwickeln, und die damit zusammenhängende Bezeichnung einzuführen, d. h. unmittelbar auf die Arithmetik die Differentialrechnung folgen zu lassen. Welche praktische Bedenken sich einer solchen Behandlungsweise entgegenstellen, ist hinlänglich bekannt.

Die Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis ist in Deutschland, ihrem Vaterlande, so sehr ausser Mode gekommen, dass man sich fast entschuldigen muss, wenn man sie wieder einführt. Nach meiner Ueberzeugung kann eine natürliche Entwickelung der algebraischen Analysis, in dem Sinne, wie ich diesen Theil der Wissenschaft auffasse, der combinatorischen Betrachtungen nicht entbehren; abgesehen davon, dass man mit diesen auch eine Menge interessanter analytischer Sätze zu entfernen gezwungen ist.

Ich habe dem Buche die Einrichtung gegeben, dass ich zuerst dasjenige zusammengestellt habe, was einen Ueberblick über die nothwendigsten Lehren der Analysis darbietet. Die weiteren Ausführungen habe ich in einzelnen Noten abgehandelt.

# Inhalt.

---

Verbesserung. S. 218 Z. 12 v. o. statt Note VII l. Note VIII.

Erstes Kapitel.

# Erklärung der algebraischen Analysis.

1.

Die Arithmetik beschäftigt sich mit der Ausführung gewisser Operationen an bestimmten Zahlen. Diese Operationen werden auf eine Anzahl Grundoperationen zurückgeführt, welche, in der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge, das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren mit ganzen Exponenten, Wurzelausziehen oder Potenziren mit gebrochenen Exponenten, und Auffinden der Logarithmen sind. Die fünf ersten dieser Operationen kann die Arithmetik an gegebenen Zahlen vollständig ausführen, die zwei letzten dagegen nur mangelhaft. Was zunächst das Wurzelausziehen betrifft, so zeigt die Arithmetik, dass wenn ein Werth $x$ gesucht wird, welcher dem Ausdrucke $x = \sqrt[q]{a}$, oder, was dasselbe sagt, der Gleichung $x^q = a$ genügt, wo $a$ und $q$ bestimmte Zahlen sind, es immer einen solchen Werth von $x$ giebt, wenn $q$ ungerade ist, dagegen zwei, der Grösse nach gleiche aber mit entgegengesetztem Zeichen versehene, wenn $q$ gerade ist. In einzelnen Fällen zeigen jedoch schon die Mittel, welche der Arithmetik zu Gebot stehen, dass es ausser diesen Werthen noch andere giebt, welche allerdings nicht reell sind. Sucht man z. B. den Werth von $x$ welcher der Gleichung $x^4 = 1$ genügt, so findet man dass man nicht blos $x = 1$ und $x = -1$ sondern auch $x = \sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-1}$ setzen kann. Es entsteht daher die Frage, wie

viel (reelle oder imaginäre) Werthe von $x$ giebt es überhaupt, die für jedes bestimmte $q$ der Gleichung $x^q = a$ genügen, und wie hängen diese Werthe zusammen?

Die Arithmetik findet ferner grosse Schwierigkeiten, indem sie Regeln zu geben sucht, nach welchen man die Werthe von $\sqrt[q]{a}$, deren Existenz sie nachweist, wirklich berechnen kann. Sie stützt sich hierbei auf die Entwickelung des Ausdrucks $(a + b)^q$, wo $q$ eine ganze positive Zahl bedeutet, in eine Reihe, die nach Potenzen von $a$ und $b$ fortgeht. Wenn es auch möglich ist diese Entwickelung mit den Hülfsmitteln der Arithmetik, zu welchen auch die Buchstabenrechnung gehört, auszuführen, so zeigt sich doch, dass selbst unter Voraussetzung dieser Entwickelung, die Ausziehung der Wurzel, sobald $q$ eine einigermassen grosse Zahl ist, so verwickelte Rechnungen erfordert, dass deren wirkliche Ausführung so gut wie unmöglich ist, weswegen in der Regel auch nur die einfachsten Fälle behandelt werden, wo $q = 2$ oder $= 3$ ist. Aber jedenfalls ist die Arithmetik nicht im Stande in einer allgemeinen Formel auszudrücken, auf welche Weise die gegebenen Werthe $a$ und $q$ zusammengesetzt werden müssen, damit der Werth des Ausdrucks $\sqrt[q]{a}$ erhalten wird.

In ähnlicher Weise verhält es sich mit den Logarithmen. Die Arithmetik kann nur nachweisen, dass man sich durch eine fortgesetzte Reihe Operationen (Wurzelausziehungen) einem Werthe nähern kann, welcher, nach der Definition des Begriffs Logarithme, auf diesen Namen Anspruch machen kann, aber sie kann nicht nachweisen, wie der Werth dieses Logarithmen durch eine allgemeine Formel aus der jedesmal gegebenen Zahl zusammengesetzt werden kann. Auch lässt die Arithmetik die Frage unbeantwortet, ob es ausser dem Werthe, welchen sie als Logarithme bezeichnet, nicht noch andere giebt, welche ebenfalls auf diesen Namen Anspruch machen können, d. h. ob die Gleichung $a^x = b$ nicht verschiedene Lösungen hat, wenn man, wie bei der Wurzelausziehung, auch imaginäre Werthe von $x$ zulässt.

2.

Diese Lücken auszufüllen ist der nächste Zweck der algebraischen Analysis. Seinen Ausgangspunkt nimmt dieser auf die Arithmetik folgende und sie voraussetzende Theil der Wissenschaft von folgenden Betrachtungen. Da die Arithmetik bestimmte Zahlen zu möglichst einfachen Resultaten zu verknüpfen sucht, wonach die ursprünglich gegebenen Zahlen so mit einander verbunden werden, dass sie in dem erhaltenen Resultate nicht mehr zu erkennen sind, so wird dieses Resultat auch nicht mehr zeigen, wie es durch das Zusammenwirken der gegebenen Zahlen entstanden ist.

Die Arithmetik sieht sich daher schon bei den einfachsten Operationen, da wo sie deren allgemeine Gesetze in Zeichen ausdrücken will, genöthigt, die Buchstabenrechnung zu Hülfe zu rufen, d. h. statt der bestimmten Zahlen allgemeine Symbole zu wählen, welche jede Zahl vorstellen können, aber ebendeswegen sich nicht mehr, wie bestimmte Zahlen, zusammenziehen lassen. Diese Bezeichnung unbestimmter Zahlen durch Buchstaben entbehrt aber ihrerseits des grossen Vorzugs, durch welchen unsere gegenwärtige Arithmetik ihre wissenschaftliche Ausbildung erlangt hat und der bekanntlich darin besteht, dass alle Zahlen durch ein bestimmtes Zahlensystem ausgedrückt sind. In unserer Arithmetik ist hierbei zufällig die Zahl Zehn als Grundzahl gewählt worden. Eine jede ganze Zahl wird durch Vielfache von Potenzen der Zahl 10 ausgedrückt, indem man von dem Vielfachen irgend einer höchsten in der Zahl enthaltenen Potenz von 10 bis zu dem Vielfachen der niedrigsten (nullten) Potenz herabgeht. Jede ganze Zahl wird auf diese Weise durch eine Summe von Vielfachen der abnehmenden Potenzen von 10 ausgedrückt. So z. B. hat man $5364 = 5 \,.\, 10^3 + 3 \,.\, 10^2 + 6 \,.\, 10^1 + 4 \,.\, 10^0$. Offenbar liegt in dieser Art die Zahlen zu schreiben eine Willkühr, da man sich mit demselben Rechte der aufsteigenden Potenzen hätte bedienen können. Was gegenwärtig 5364 heisst, hätte nach Uebereinkunft auch $4365 = 4 \,.\, 10^0 + 6 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^3$ heissen können.

In ihrer weiteren Entwickelung sieht sich die Arithmetik

veranlasst auch Brüche so auszudrücken, dass ihr Werth nach abnehmenden Potenzen der Zahl 10 geordnet erscheint, was wir Decimalbrüche nennen. Sie bedient sich hierzu der negativen Potenzen der Zahl 10. So ist z. B. der Decimalbruch $0{,}123 = 1 \, . \, 10^{-1} + 2 \, . \, 10^{-2} + 3 \, . \, 10^{-3}$. Während aber die ganzen Zahlen immer aus einer endlichen Anzahl nach Potenzen der Grundzahl geordneter Glieder bestehen, muss die Arithmetik, bei den Decimalbrüchen, in den meisten Fällen eine ins Unendliche fortlaufende Gliederreihe zulassen, wodurch der für ihre weitere Entwickelung so fruchtbare Gedanke der unendlichen Reihe entsteht. So kann z. B. der Bruch $\frac{1}{3}$ als Decimalbruch nur durch die unendliche Reihe $\frac{1}{3} = 3(\frac{1}{10}) + 3(\frac{1}{10})^2 + 3(\frac{1}{10})^3 + \ldots$ ausgedrückt werden.

3.

Die algebraische Analysis geht nun, um zu ihrem Ziele zu gelangen, von einer Grundlage aus, welche die Vorzüge der Arithmetik und der Buchstabenrechnung vereinigt. Sie beginnt nemlich damit, dass sie eine jede Zahl durch eine Reihe Glieder ausdrückt, die nach Potenzen einer Grundzahl geordnet sind; zu dieser Grundzahl nimmt sie aber nicht, wie die Arithmetik, eine bestimmte Zahl, sondern vielmehr ein unbestimmtes Zeichen, etwa $x$, unter welchem man sich eine jede beliebige Zahl denken kann. Lässt man zunächst nur solche Ausdrücke zu, welche ganze positive Potenzen von $x$ enthalten, so werden die Zahlen entweder durch eine Reihe von der Form

A) $$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx^0$$

ausgedrückt werden, wenn man nach fallenden Potenzen von $x$ ordnet, oder durch eine Reihe von der Form

B) $$ax^0 + bx^1 + cx^2 + \ldots$$

wenn man nach steigenden Potenzen von $x$ ordnet.

Die Grössen $a, b, c, \ldots$ mit welchen die verschiedenen Potenzen von $x$ multiplicirt sind, nennt man Coefficienten, sie bedeuten nicht mehr, wie die ihnen entsprechenden Zahlen in der Arithmetik, nur ganze positive Zahlen, sondern können jeden beliebigen Zahlenwerth haben.

An und für sich sind die beiden Formen A) und B) vollkommen gleich berechtigt, indessen hat die zweite Form einen wesentlichen Vorzug. Durch die Formel A) kann man nemlich nur einen aus einer endlichen Gliederzahl bestehenden Ausdruck darstellen, da man mit einer bestimmten Potenz (der $m^{ten}$) beginnt und bis zur nullten fortgeht. Die Form B) dagegen kann aber nicht blos ebenfalls Ausdrücke darstellen, welche aus einer endlichen Gliederzahl bestehen, sondern sie kann ausserdem auch eine unendliche Reihe darstellen, indem man sich die Glieder bis zu jeder noch so hohen Potenz von $x$ fortgesetzt denken kann.

Da nun schon die Arithmetik, wie oben erwähnt wurde, die unendlichen Reihen in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen muss, so wird dies um so mehr bei der algebraischen Analysis der Fall seyn. Aus diesem Grunde soll im Folgenden die Form B) vorzugsweise benutzt werden.

Indem nun die algebraische Analysis von der Darstellung der Zahlen durch Reihen dieser Form ausgeht, muss sie nachweisen, ob und wie die Operationen, welche die Arithmetik an bestimmten Zahlen ausgeführt hat, sich auch auf solche Reihen ausdehnen lassen. Man kann daher die algebraische Analysis dadurch definiren, dass man sagt, sie lehrt das Rechnen mit Reihen die nach positiven (steigenden) Potenzen einer Grundgrösse geordnet sind. Man hat sie mitunter bezeichnender die allgemeine Arithmetik genannt, da es sich in der That um eine Verallgemeinerung der Arithmetik handelt, doch ist dieser Name wenig in Gebrauch gekommen.

4.

Es kann den Anschein haben als sey der algebraischen Analysis mit dieser Definition eine zu beschränkte Grundlage gegeben. Denn da schon in dem speciellen Falle, welchen die Arithmetik behandelt, Reihen zugelassen werden müssen, welche nach negativen Potenzen der Grundzahl fortschreiten, so müsste dies um so mehr in den allgemeineren Betrachtungen der algebraischen Analysis der Fall seyn. Indessen ist leicht nachzuweisen, dass solche Reihen immer in andere

verwandelt werden können, die nach den positiven Potenzen einer Grundgrösse fortgehen. Man denke sich die Reihe

$$Ax^a + Bx^{a+b} + Cx^{a+2b} + Dx^{a+3b} \ldots\ldots$$

sey $a$ positiv und $b$ negativ, so wird $a + b$ positiv seyn wenn $a > b$, zugleich ist $a + b < a$; ist auch $a > 2b$, so wird $a + 2b$ ebenfalls positiv seyn aber zugleich $a + 2b < a + b$. Die Reihe wird also in ihrem Anfange nach abnehmenden positiven Potenzen von $x$ fortgehen. Ist $a > rb$ und zugleich $a < (r + 1)b$, so wird der Exponent $a + rb$ noch positiv seyn, dagegen wird der Exponent $a + (r + 1)b$ wie alle folgenden negativ seyn. Diese Reihe wird also dem arithmetischen allgemeinsten Falle entsprechen, wo ein Zahlenausdruck aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche zusammengesetzt ist. Schreibt man aber statt dieser Reihe den gleichgeltenden Ausdruck

$$x^a\,(A + Bx^b + Cx^{2b} + Dx^{3b} + \ldots)$$

so ist nun die ursprüngliche Reihe in zwei Faktoren zerlegt, wovon der eine, nemlich $x^a$, eine einfache Potenz von $x$ ist, von welcher man absehen kann, wenn es sich um das Rechnen mit Reihen handelt. In dem anderen Faktor aber setze man das Zeichen $y$ für $x^b$, dann geht er in

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots$$

über, welches wieder eine Reihe von der Form B) ist, so dass man mithin, ohne der Allgemeinheit zu schaden, bei dieser Form stehen bleiben kann. Aus diesem Grunde werden wir im Folgenden unter dem Worte Reihe immer eine Reihe von der Form B) verstehen.

5.

Es stellt sich aber dem Rechnen mit Reihen gleich im ersten Anfange eine grosse Schwierigkeit entgegen. In der Arithmetik haben wir es nur mit ganz bestimmten endlichen Zahlenwerthen zu thun, deren Verknüpfung, was wir eben Rechnen nennen, wieder auf bestimmte endliche Zahlenwerthe führt, wenn man von besonderen Ausdrücken, wie z. B. $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{0}$, absieht. Auch diejenigen Zahlenausdrücke, welche

aus einer unendlichen Gliederreihe bestehen, sind doch immer endliche zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossene Werthe. So z. B. die in das Unendliche fortlaufenden Decimalbrüche, die sich desto mehr einer bestimmten Grenze nähern, je mehr ihrer ersten Glieder man zusammenzählt.

Hat man dagegen einen in das Unendliche fortlaufenden Ausdruck von der Form

$$ax^0 + bx^1 + cx^2 + \ldots.$$

wo sowohl die Coefficienten wie die Grundzahl $x$ ganz unbestimmte, wenn auch endliche Werthe, sind, so ist es sehr wohl möglich dass ein solcher Ausdruck, obgleich er nur alle denkbaren Zahlen in allgemeinster Form angeben soll, wenn man für die Coefficienten und die Grundzahl bestimmte Werthe setzt, durchaus keinen bestimmten Werth mehr hat, sondern etwas alle Grenzen Ueberschreitendes darstellt. Setzt man z. B. $x = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und so fort für die folgenden Coefficienten die auf einander folgenden ganzen Zahlen, so geht die Reihe in

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

über und man sieht sogleich, dass diese Reihe, je mehr ihrer ersten Glieder man zusammennimmt, einen desto grösseren Werth giebt, welcher zuletzt über jeden angebbaren Zahlenwerth hinauswächst. Diese Reihe drückt also gar keinen bestimmten Zahlenwerth aus und man kann ebendeswegen mit ihr nicht im Sinne der Arithmetik rechnen, obgleich sie als einzelner Fall in der allgemeinen zu Grund gelegten Form B) enthalten ist.

Wollte man sagen dass man mit Reihen von der Form B nur unter der Beschränkung rechnet, dass sie einen bestimmten Zahlenwerth haben, so würde hierdurch die Allgemeinheit der Betrachtung, welche ja der wesentliche Vorzug der algebraischen Analysis seyn soll, aufgehoben. Es müssten zugleich sofort beim Beginn der Untersuchungen die Kennzeichen angegeben werden durch welche man die Fälle, in denen die Form B) einen bestimmten Werth ausdrückt, von jenen unterscheiden könnte, wo dies nicht der Fall ist, während diese Kennzeichen erst später aus der bis zu einer gewissen Stufe

entwickelten algebraischen Analysis abgeleitet werden sollen. Es wird daher nothwendig seyn die Definitionen der Operationen der Arithmetik so zu modificiren, dass sie auf Reihen von der Form B), auch wenn diese in ihrer ganzen Allgemeinheit belassen werden, anwendbar sind. Die nach Anleitung solcher Definitionen gestifteten Verknüpfungen der Reihen wird das Rechnen mit Reihen ausmachen. Es wird aber zugleich später nachzuweisen seyn, wie diese Definitionen mit den als bekannt vorausgesetzten Definitionen der Arithmetik dann zusammenstimmen, wenn jene Reihen wirklich bestimmte Zahlenwerthe ausdrücken.

6.

Zwischen dem Rechnen mit Reihen und dem Rechnen mit Zahlen findet zugleich ein wesentlicher formeller Unterschied statt. Verknüpft man Zahlen mit einander, so setzt man, statt der Summe zweier Zahlen, die Zahl welche diese Summe ausdrückt, statt der Differenz zweier Zahlen, die Zahl welche diese Differenz ausdrückt u. s. w. Man schreibt z. B. 4 statt $2 + 2$ und 1 statt $3-2$. In dem Resultate der Verknüpfung gewisser Zahlen kommen also diese Zahlen nicht mehr unmittelbar vor, im Gegentheil ist es, wie schon oben hervorgehoben wurde, eine wesentliche Eigenschaft des Rechnens mit Zahlen, dass man diese zusammenzieht und in andere verwandelt. Man kann also auch aus dem Resultate nicht mehr die Zahlen erkennen, durch deren Zusammenwirken es entstanden ist. Anders verhält es sich bei dem Rechnen mit Reihen. Verknüpft man mehrere solche mit einander, so kann eine Zusammenziehung nur in sofern in dem Resultate statt finden, dass man die einzelnen Theile, welche dieselbe Potenz von $x$ enthalten, in ein einziges Glied zusammenstellt. Eine Zusammenziehung der Coefficienten ist aber natürlich nicht möglich. Diese werden vielmehr unverändert in dem Resultate wieder zu erkennen seyn, und das eigentliche Wesen des Rechnens wird also hier darin bestehen, dass man das Gesetz erkennt nach welchem, bei einer gewissen Operation, die Coefficienten der ursprünglich gegebenen Reihen in dem Resultate zusammentreten. Es wird sich also jedesmal um einen einzelnen Fall aus dem

allgemeinen Gebiete jener Wissenschaft handeln, welche man die Combinationslehre nennt, deren Aufgabe es ist, die verschiedenen möglichen Zusammenstellungen nebst deren gesetzmässiger Ausführung zu bestimmen, welche bei einer gegebenen Anzahl Gegenstände statt finden können. Insofern daher die Combinationslehre eine unentbehrliche Hülfswissenschaft der algebraischen Analysis ist, soll dieselbe zunächst soweit entwickelt werden, als es für die späteren analytischen Betrachtungen erforderlich ist.

## Zweites Kapitel.

## Die Elemente der Combinationslehre.

---

7.

In der Combinationslehre werden die Gegenstände, welche in einer gewissen Ordnung zusammengestellt werden sollen, Elemente genannt und jede solche Zusammenstellung eine Form. Da es hierbei gar nicht darauf ankommt, welcher Art diese Gegenstände sind, so kann man sie, was auch ihre sonstige Beschaffenheit sey, durch Symbole bezeichnen, welche dazu dienen die einzelnen Gegenstände oder Elemente von einander zu unterscheiden. Am einfachsten geschieht dies dadurch, dass man sie numerirt d. h. dass man irgend ein Element durch die Ziffer 1, ein anderes durch die Ziffer 2 u. s. w. bezeichnet. Man spricht alsdann von einem Elemente 1, einem Elemente 2 u. s. w., wobei jedoch durchaus nicht an den Zahlenwerth dieser Ziffer gedacht werden darf, da sie, wie gesagt, nur dazu dienen die verschiedenen Elemente einzeln zu bezeichnen. Mitunter ist es vortheilhaft auch die Null als Symbol eines Elements anzuwenden.

Diese Bezeichnung der Elemente ist ausreichend, wenn man sich nur eine einzige Elementenreihe denkt. Mitunter aber können die Elemente in verschiedene Reihen vertheilt seyn und es kann nothwendig seyn nicht blos die einzelnen Elemente einer jeden Reihe von einander zu unterscheiden,

sondern durch die Bezeichnung auch auszudrücken zu welcher Reihe irgend ein Element gehört. In diesem Falle muss für alle zu derselben Reihe gehörenden Elemente ein gemeinsames Symbol angewandt, mit diesem aber noch ein zweites verbunden werden, durch welches wieder die einzelnen Elemente der Reihe unterschieden werden. Am häufigsten bedient man sich, um die Reihen zu unterscheiden, der Buchstaben. Man bezeichnet also z. B. alle Elemente, welche zu einer bestimmten Reihe gehören, durch den gemeinsamen Buchstaben $a$. Um aber die einzelnen Elemente von einander zu unterscheiden, benutzt man wieder die Ziffer, welche man mit dem Buchstaben zusammenstellt, so dass etwa die einzelnen Elemente durch $a_0$, $a_1$, $a_2$ ... bezeichnet werden. Ebenso werden die Elemente, die einer zweiten Reihe angehören, durch $b_0$, $b_1$, $b_2$... ausgedrückt werden können u. s. w. Jede den Buchstaben beigesetzte Ziffer pflegt man einen Index zu nennen.

Obgleich diese Bezeichnungsweise einen sehr ausgedehnten Gebrauch zulässt, giebt es doch Fälle in welchen sie unzureichend ist. Schon der Umstand dass jedes Alphabet nur eine beschränkte Anzahl Buchstaben enthält, also bei einer grösseren Anzahl Elementenreihen nicht mehr ausreicht, zeigt ihre Mangelhaftigkeit. Sie wird aber gänzlich unbrauchbar, wenn es darauf ankommt, ein Symbol für irgend eine Reihe anzugeben, deren Stellung unbestimmt bleiben soll, so dass es nicht die erste oder die zweite Reihe u. s. w. sondern irgend eine Reihe seyn soll. Denn gerade die Buchstaben sind es, welche wir in der Algebra zur Bezeichnung einer unbestimmten Zahl anwenden, während wir hier schon jeden einzelnen Buchstaben zur Charakterisirung einer einzelnen Reihe anwenden.

Der Natur der Sache angemessener ist es die Reihen ebenfalls durch Ziffer zu bezeichnen. Jedes Element wird dann durch zwei Ziffer bezeichnet, wovon die eine die Stellung der Reihe, zu welcher das Element gehört, die andere die Stellung des Elements in der Reihe angiebt. Bestimmt man etwa, dass von zwei neben einander gesetzten Ziffern, die erste auf die Reihe und die zweite auf das Element deutet, so würde z. B. [1, 2] das zweite Element der ersten Reihe seyn u. s. w. Vermöge dieser Bezeichnungsweise kann man

mithin ein unbestimmtes Element einer unbestimmten Reihe ausdrücken und es wird z. B. [*r*, *s*] das *s*te Element der *r*ten Reihe seyn. Bei manchen Untersuchungen kann ein solches allgemeines Symbol gar nicht entbehrt werden. Für die folgenden analytischen Betrachtungen reicht die Bezeichnung der Reihen durch Buchstaben und der Elemente durch Indices fast immer aus, und wir werden dieselbe beibehalten, weil sie in Schrift und Druck bequemer ist *).

8.

Die combinatorischen Untersuchungen, welche nur eine einzige Elementenreihe voraussetzen, zerfallen in zwei Hauptklassen. Entweder sollen aus den gegebenen Elementen Formen gebildet werden, so dass in jeder Form alle Elemente vorkommen, und es sollen alle möglichen Formen angegeben werden, welche aus einer Aenderung in der Aufeinanderfolge der Elemente entstehen. Die Ausführung dieser combinatorischen Operation nennt man Permutiren und die einzelnen Formen Permutationen. Bei dem Permutiren liegt also die Verschiedenheit der Formen blos in der Verschiedenheit der Stellung der Elemente, während diese selbst in allen Formen die nämlichen sind.

Betrachtet man dagegen die Verschiedenheit der Stellung als gleichgültig, so dass zwei, dieselben Elemente, wenn auch in verschiedener Stellung, enthaltenden Formen als identisch angesehen werden, und verlangt, dass die Elemente einzeln, oder zu zweien, zu dreien u. s. w. zusammengestellt werden, so dass alle Formen gebildet werden, welche nicht genau dieselben Elemente enthalten, so nennt man die Ausführung dieser combinatorischen Operation Combiniren, im engeren Sinne des Wortes, und die einzelnen Formen Combinationen.

Man unterscheidet höhere Elemente und niedrigere. Je nachdem nemlich die Elemente durch Ziffer oder durch Buchstaben mit angehängten Indices bezeichnet werden, nennt man von zwei Elementen dasjenige das höhere, welches durch

*) In §. 51 ff. ist jedoch von dem allgemeineren Symbol Gebrauch gemacht.

eine Ziffer von grösserem Zahlenwerthe, oder durch einen Buchstaben mit angehängtem Index von grösserem Zahlenwerthe bezeichnet wird. Ebenso unterscheidet man höhere Formen und niedrigere, indem man von zwei Formen, mögen sie eine gleiche oder verschiedene Anzahl Elemente enthalten, diejenige als die höhere ansieht, in welcher, von der Linken nach der Rechten gezählt, früher als in der anderen ein höheres Element vorkommt. Die niedrigste Form ist mithin diejenige, in welcher jede Stelle durch das niedrigste Element eingenommen wird, welches möglicher Weise in derselben stehen kann.

9.

Als Zeichen für die Operation des Permutirens nehmen wir den Buchstaben $P$. Sollen z. B. aus den Elementen $1, 2, \ldots n$ sämmtliche Permutationen gebildet werden, so wird deren Gesammtheit durch $P(1, 2 \ldots n)$ angedeutet. Um nun diese Permutationen vollständig zu finden, bilde man zuerst die Permutationen aus den zwei Elementen 1, 2. Dies giebt die zwei Formen 12, 21 welche mithin durch $P(1, 2)$ angedeutet werden. Man nehme nun das Element 3 und setze es in jeder dieser Formen an jede der drei Stellen die es einnehmen kann, so erhält man die sechs Formen 312, 132, 123, 321, 231, 213, dies sind alle in $P(1, 2, 3)$ enthaltenen Formen. Setzt man nun wieder in jeder dieser Formen das Element 4 an jede der 4 Stellen die es einnehmen kann, so erhält man $P(1,2,3,4)$ und indem man so fortfährt, erhält man zuletzt $P(1, 2 \ldots n)$.

Dies Verfahren zeigt zugleich wie gross die Anzahl der Permutationsformen welche aus $n$ Elementen gebildet werden können, oder, wie man sagt, die Permutationszahl für $n$ Elemente, ist. Bezeichnet man diese Zahl durch $NP(1, 2 \ldots n)$, so hat man $NP(1, 2) = 1.2$. Nun findet man $P(1, 2, 3)$ aus $P(1, 2)$ indem man in jeder darin enthaltenen Form das Element 3 an drei verschiedene Stellen setzt, mithin ist $NP(1, 2, 3) = 1.2.3$. Ebenso folgt $NP(1, 2, 3, 4) = 1.2.3.4$ und allgemein $NP(1, 2, \ldots n) = 1.2.3 \ldots n$.

Im Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, dass die Elemente sämmtlich unter einander verschieden sind. Mitunter

kommt es aber auch vor, dass man sich mehrere Elemente als identisch vorstellt, die mithin auch durch dasselbe Zeichen angedeutet werden müssen. Bei dieser Voraussetzung fallen also alle die Formen in eine zusammen, welche bis jetzt nur deswegen als verschiedene erschienen, weil die jetzt gleichgeltenden Elemente ihre Stellen unter einander vertauscht hatten. Es vermindert sich daher die frühere Permutationszahl für $n$ Elemente im Verhältniss der Zahl, welche angiebt, wie oft man die jetzt gleichen Elemente, wenn sie als verschiedene angesehen würden, unter einander permutiren könnte. Hat man mithin unter $n$ Elementen $q$ gleiche, so ist

$$1) \quad NP(1,2\ldots n) = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots q} = (q+1)\,(q+2)\ldots n$$

Hat man unter $n$ Elementen eine Gruppe von $q$ unter sich gleichen, und eine andere Gruppe von $r$ unter sich gleichen Elementen, so ist

$$NP(1,2\ldots n) = \frac{1.2\ldots n}{1.2..q.1.2\ldots r} = \frac{(q+1)(q+2)\ldots n}{1.2\,..\,r}$$
$$= \frac{(r+1)\,(r+2)\ldots n}{1.2\ldots q} \;*)$$

In ähnlicher Weise findet man die Permutationszahl, wenn mehr als zwei Gruppen gleicher Elemente vorhanden sind.

10.

Als Zeichen für die Operation des Combinirens (im engeren Sinne) nehmen wir den Buchstaben $C$ und bezeichnen durch $C\,(1,\,2,\,\ldots\,n)$ den Inbegriff aller aus diesen Elementen gebildeten Combinationen. Man unterscheidet hier verschiedene Combinationsklassen. Die Elemente einzeln genommen bilden die erste Klasse, die Zusammenstellung zu zweien die zweite

*) Diese Formel enthält zugleich einen interessanten arithmetischen Lehrsatz. Da nemlich eine Permutationszahl der Natur der Sache nach nur eine ganze Zahl seyn kann, so sagt diese Formel, dass wenn $q+r$ nicht grösser als $n$ ist, sowohl das Produkt $(q+1)$ $(q+2)\ldots n$ durch $1.2\,..\,r$ als auch das Produkt $(r+1)\,(r+2)\ldots n$ durch $1.2\,..\,q$ theilbar ist. Aehnliche Sätze folgen aus der Permutationszahl, welche bei mehr als zwei gleichen Elementengruppen anzuwenden ist.

Klasse u. s. w. Die Klasse wird durch einen über das Combinationszeichen gesetzten Index angedeutet; so heisst $\overset{r}{C}(1, 2 \ldots n)$ die $r$te Combinationsklasse aus den $n$ Elementen 1, 2, .. $n$. Auch hier kann es vorkommen dass mehrere in einer Form erscheinenden Elemente als identisch betrachtet werden. Darf das Element 1 z. B. $k$ mal in derselben Form vorkommen, so soll dies durch $1_k$ angedeutet werden, und so in allen ähnlichen Fällen. Es wird also z. B. durch $\overset{r}{C}(1_k, 2_l, 3_m \ldots)$ der Inbegriff der Formen bezeichnet, welche zur $r$ten Classe, gebildet aus den Elementen 1, 2, 3 ..., gehören, wobei jedoch in derselben Form $k$ mal das Element 1, ferner $l$ mal das Element 2 u. s. w. vorkommen kann. Für die Analysis sind besonders die zwei äussersten Fälle wichtig, wo nemlich entweder gar kein Element wiederholbar ist, was man Combinationen ohne Wiederholung nennt, oder wo jedes Element so oft wiederholbar ist, als es überhaupt der Grad der Klasse erlaubt, was man Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung nennt.

Da bei den Combinationen die Stellung der Elemente in der Form gleichgültig ist, so macht man es, um eine bestimmte Ordnung zu beobachten, zum Gesetz, die Formen so zu schreiben, dass die Elemente in ihrer natürlichen Ordnung stehen, d. h. dass kein höheres Element einem niedrigeren vorausgeht.

Dies vorausgesetzt kann man durch folgendes Verfahren die sämmtlichen zu irgend einer Combinationsklasse gehörenden Formen finden. Man nehme nemlich an, es seyen bereits die zur $r-1$ten Klasse gehörenden Formen gebildet. Um nun die Formen der nächst höheren $r$ten Klasse zu finden, setze man allen Formen der $r-1$ten Klasse alle zur Verfügung stehenden unter einander verschiedenen Elemente vor, welche niedriger sind als die Anfangselemente dieser Formen, wenn es nicht gestattet ist, dieses Anfangselement nochmals zu wiederholen, oder welche nicht höher sind, wenn dieses Anfangselement nochmals wiederholt werden darf. Hierdurch erhält man offenbar alle Combinationen der $r$ten Klasse. Da nun die Combinationen der ersten Klasse sich von selbst ergeben, indem sie nichts Anderes sind, als die einzelnen ver-

schiedenen Elemente selbst, so kann man, von ihnen ausgehend, die Combinationen einer jeden anderen Klasse finden. So hat man z. B. $\overset{1}{C}(1_2, 2) = 1, 2$. Daraus folgt $\overset{2}{C}(1_2, 2) = 11, 12$; $\overset{3}{C}(1_2, 2) = 112$.

Die Frage nach der Anzahl der Combinationen aus einer bestimmten Elementenzahl und einer bestimmten Klasse hat für die folgenden Untersuchungen nur in dem besonderen Falle Wichtigkeit, wenn die Elemente als nicht wiederholbar gedacht werden. Bezeichnet man dann die Anzahl der Combinationen zur Klasse $r$ aus den Elementen $1, 2, \ldots n$ durch $N\overset{r}{C}(1, 2 \ldots n)$ so findet man diese Zahl auf folgende Weise. Da die erste Klasse die $n$ einzelnen Elemente enthält, so ist offenbar $N\overset{1}{C}(1, 2 \ldots n) = n$. Man setze nun jedes der $n$ Elemente den übrigen $n-1$ Elementen vor, so giebt dies $n \, . \, n-1$ Formen. Dies sind aber die Combinationen der zweiten Klasse nebst ihren Permutationen, da jedes der $n$ Elemente jedem anderen sowohl vorangeht als nachfolgt. Dividirt man daher $n \, . \, n-1$ mit der Permutationszahl zweier Elemente, also mit $1 \, . \, 2$, so erhält man

$$N\overset{2}{C}(1, 2 \, . \, . \, n) = \frac{n \, . \, n-1}{1 \, . \, 2}$$

Setzt man vor jede der $n \, . \, n-1$ Formen die einzelnen nicht darin enthaltenen $n-2$ Elemente, so erhält man $n \, . \, n-1 \, . \, n-2$ Formen, dies sind aber die Combinationen der dritten Klasse nebst ihren Permutationen, mithin

$$N\overset{3}{C}(1, 2 \, . \, . \, . \, n) = \frac{n \, . \, n-1 \, . \, n-2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$$

Fährt man so fort, so findet man allgemein

$$2) \qquad N\overset{r}{C}(1, 2, \, . \, . \, . \, n) = \frac{n \, . \, n-1 \ldots n-r+1}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, r}$$

### 11.

Während bei den vorher betrachteten combinatorischen Operationen nur eine einzige Elementenreihe vorausgesetzt wird, erfordert die Operation des Variirens das Vorhandenseyn mehrerer getrennter Elementenreihen. Es wird nemlich bei dieser Operation verlangt dass man alle Formen bildet,

welche dadurch entstehen, dass aus jeder Reihe ein und nur ein Element in jeder Form vorkommt. Die einzelnen Formen nennt man Variationen. Die Stellung der Elemente in der Form ist hier wieder gleichgültig, wie bei den Combinationen, und die Verschiedenheit zweier Formen wird auch hier wieder dadurch bedingt, dass sie nicht genau dieselben Elemente enthalten. Man macht es daher zum Gesetz, dass die Elemente der ersten Reihe immer die erste Stelle, die Elemente der zweiten Reihe die zweite Stelle u. s. w. einnehmen sollen. Da mithin schon durch die Stelle, welche ein Element einnimmt, die Reihe zu welcher es gehört, bezeichnet ist, so kann man, obgleich verschiedene Reihen zu unterscheiden sind, doch die sämmtlichen Elemente durch eine einzige Zahlenreihe ausdrücken. Man bezeichne nemlich das nullte Element aus jeder Reihe durch 0, das 1te Element aus jeder Reihe durch 1 u. s. w., so zeigt schon die Stelle, in welcher das Element steht, zu welcher Reihe es gehört. Als Zeichen für die Operation des Variirens dient der Buchstabe $V$. Sind $m$ Reihen vorhanden, so enthält jede Variationsform $m$ Elemente, den Inbegriff dieser Formen nennt man die Variationen der $m$ten Klasse, und hat dafür das Zeichen $\overset{m}{V}$. Die einzelnen Elemente der ersten Reihe bilden die erste Klasse. Um $\overset{m}{V}$ zu finden, suche man zuerst $\overset{2}{V}$ d. h. die aus den zwei ersten gegebenen Reihen zu bildende zweite Variationsklasse. Dies geschieht dadurch, dass man allen einzelnen Elementen der ersten Reihe alle einzelnen Elemente der zweiten Reihe zusetzt. Setzt man ferner zu allen so gebildeten Formen alle einzelnen Elemente der dritten Reihe, so erhält man die Variationen der dritten Klasse und kann, indem man so fortfährt, die Variationen jeder Klasse finden. Da alle Elemente jeder Reihe mit allen Elementen jeder anderen zusammengestellt werden, so ist es offenbar ganz gleichgültig in welcher Ordnung man die Reihen verbindet, d. h. die Variationen aus $m$ Reihen bleiben immer dieselben, in welcher Ordnung die Reihen auf einander folgen mögen.

Enthält die erste Reihe $a$ Elemente, die zweite $b$ Elemente, die dritte $c$ Elemente u. s. w., so enthält die erste Variations-

klasse *a* Formen, die zweite *ab*, die dritte *abc* u. s. w. Hat man mithin *m* Reihen und enthält jede *a* Elemente, so ist die Anzahl der Formen $a^m$.

12.

Für die analytischen Untersuchungen hat der Fall, wenn alle Reihen identisch, also alle ersten Elemente dieselben, alle zweiten Elemente dieselben sind u. s. w., besonderes Interesse. Dann behält jede ein Element bezeichnende Ziffer denselben Werth, in welcher Stelle einer Form sie stehen mag. Alle Variationsformen, welche dieselben Ziffern, nur in anderer Stellung, enthalten, werden also identisch seyn, und man findet sie mithin alle, wenn man eine herausnimmt und diese permutirt. Für die zu permutirende Form wählt man, am angemessensten, diejenige in welcher die Elemente in ihrer natürlichen Ordnung stehen, d. h. die entsprechende Combinationsform mit unbeschränkter Wiederholung. Man hat daher die Regel: Sollen aus *m* identischen Reihen die Variationen gebildet werden, so bilde man zuerst die Combinationen der *m*ten Klasse mit unbeschränkter Wiederholung aus der gegebenen Elementenreihe und permutire dann jede dieser Formen vollständig. Die Gesammtheit der auf diese Weise erzeugten Formen giebt die gesuchten Variationen.

Bei dem Gebrauch dieser Variationen in der Analysis tritt noch gewöhnlich die Bestimmung hinzu, dass die einzelnen Variationsformen durch Addition und die einzelnen Elemente jeder Form durch Multiplikation verbunden werden sollen. Dann braucht man mithin nur jede der Combinationen mit der dazu gehörenden Permutationszahl zu multipliciren. Sind die Elemente jeder der identischen Reihen 1, 2 .. *n* und bezeichnet $\overset{m}{Cp}(1, 2 \ldots n)$ die Summe der aus diesen Elementen gebildeten Combinationen zur *m*ten Classe mit unbeschränkter Wiederholung, jede Combination mit der dazu gehörenden Permutationszahl multiplicirt, so hat man unter der eben gemachten Voraussetzung

$$3) \qquad \overset{m}{V}(1, 2 \ldots n) = \overset{m}{Cp}(1, 2 \ldots n)$$

Ebenso findet man, wenn die Elemente durch $0, 1, 2 \ldots n$ bezeichnet werden,

4) $\overset{m}{V}(0, 1, 2 \ldots n) = \overset{m}{Cp}(0, 1, 2 \ldots n)$

Es sollen z. B. die Variationen aus den drei identischen Reihen

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{matrix}$$

gebildet werden. Hier werden die Elemente jeder Reihe zunächst durch 0, 1, 2 ausgedrückt. Man bildet $\overset{3}{C}(0_3, 1_3, 2_3)$, dies giebt 000, 001, 002, 011, 012, 022, 111, 112, 122, 222. Nun ist (nach §. 9) $NP(000) = 1$, $NP(001) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3$,

$$NP(002) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3,\ NP(011) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3,$$

$$NP(012) = 1.2.3 = 6,\ NP(022) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3, NP(111) = 1,$$

$$NP(112) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3,\ NP(122) = \frac{1.2.3}{1.2} = 3,\ NP(222) = 1.$$

Setzt man nun wieder $a_0$ statt 0, $a_1$ statt 1, $a_2$ statt 2, so findet man für die gesuchten Variationen

$$a_0 a_0 a_0 + 3 a_0 a_0 a_1 + 3 a_0 a_0 a_2 + 3 a_0 a_1 a_1 + 6 a_0 a_1 a_2$$
$$+ 3 a_0 a_2 a_2 + a_1 a_1 a_1 + 3 a_1 a_1 a_2 + 3 a_1 a_2 a_2 + a_2 a_2 a_2.$$

13.

In der letzten Betrachtung wurde zum ersten Male eine Verbindung zwischen einer combinatorischen und einer arithmetischen Operation vorgenommen. Hier wurden die einzelnen Formen durch Addition verbunden, die einzelnen Elemente jeder Form durch Multiplikation. Man kann sich ebenso denken, dass die einzelnen, in jeder Form erscheinenden Elemente durch irgend eine andere arithmetische Operation verbunden sind. Unter den mancherlei merkwürdigen Untersuchungen, auf welche dieser Gedanke führt, ist für die algebraische Analysis besonders diejenige wichtig, wo man aus sämmtlichen Formen diejenigen heraushebt, bei welchen die Summe der die Elemente vertretenden Ziffern (oder der Indices, wenn die Elemente durch Buchsta-

ben mit Indices bezeichnet werden) in jeder Form eine gegebene ist. Handelt es sich um Combinationen, so nennt man dies *Combinationen zu bestimmten Summen*, ist von Variationen die Rede, so sind dies *Variationen zu bestimmten Summen*. Sollen aus den Combinationen der $m$ten Klasse, gebildet aus den Elementen 1, 2, ... $n$, diejenigen herausgehoben werden, bei welchen die Summe der Elemente in jeder Form den Werth $r$ giebt, so bezeichnen wir deren Gesammtheit durch ${}^{r}\overset{m}{C}(1, 2 \ldots n)$. Ebenso bezeichnet ${}^{r}\overset{m}{V}(1, 2 \ldots n)$ die Gesammtheit der Variationen aus $m$ Reihen, bei welchen die Summe der Elemente in jeder Form den Werth $r$ hat, wenn in jeder aus $n$ Elementen bestehenden Reihe das erste Element durch 1, das zweite durch 2 u. s. w. bezeichnet wird. Während also z. B. $\overset{3}{C}(1_3, 2_3, 3_3)$ die Formen 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333 enthält, kommen in ${}^{5}\overset{3}{C}(1_3, 2_3, 3_3)$ nur die Formen 113, 122 vor.

Offenbar würde man sehr viel überflüssige Operationen vornehmen und also unwissenschaftlich verfahren, wenn man zuerst alle Formen entwickeln und dann diejenigen heraussuchen wollte, bei welchen die Summe der Elemente die verlangte Zahl giebt. Es müssen vielmehr die Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen unabhängig von den Formen, welche andere Summen geben, gefunden werden.

## 14.

Was die *Combinationen* betrifft, so ist es für das Folgende nur nöthig den Fall zu betrachten, wenn ${}^{r}\overset{m}{C}(0_m, 1_m, \ldots n_m)$ oder ${}^{r}\overset{m}{C}(1_m, 2_m, \ldots n_m)$ gesucht wird, also jedes Element unbeschränkt wiederholbar ist. Um alsdann aus einer bereits gebildeten Form die nächst höhere zu finden, suche man in ihr das späteste Element auf, es heisse $s$, auf welches in irgend einem Abstande ein um wenigstens zwei Einheiten höheres folgt, man vertausche dann das Element $s$ mit dem nächst höheren $s+1$ und setze auch in alle folgenden Stellen, die letzte ausgenommen, $s+1$. In die letzte Stelle wird dann noch das Element gesetzt, es heisse $t$, welches zu den vorher-

gehenden addirt, die verlangte Summe giebt. Dies setzt aber voraus, dass $t$ nicht kleiner als $s + 1$ ist. Um zu bestimmen wann dies der Fall ist, nehme man an dass in der gegebenen Form auf das späteste Element $s$ noch $k$ Elemente folgen, deren Summe $a$ ist. Indem man also in $k$ Stellen das Element $s + 1$ oder ein höheres Element setzen muss um die Summe $a$ zu erhalten, hat man

$$k\,(s + 1) \overline{\overline{<}}\, a$$

d. h. $a \overline{\overline{>}}\, k\,(s + 1)$ oder $s \overline{\overline{<}}\, \frac{a}{k} - 1$. Es wird also immer und nur dann noch aus einer Form eine höhere abgeleitet werden können, wenn das Element, welches mit dem nächst höheren vertauscht werden soll, nicht grösser ist als der um eine Einheit verminderte Bruch, dessen Zähler die Summe aller folgenden Elemente und dessen Nenner die Anzahl dieser Elemente ist.

Es ist demnach nur noch nöthig die niedrigste Form zu finden, aus welcher dann die übrigen Formen, wie so eben gezeigt wurde, abgeleitet werden. Bei ${}^{r}\overset{m}{C}\,(0_m, 1_m, \ldots n_m)$ findet man die niedrigste Form, indem man die $m - 1$ ersten Stellen mit 0 besetzt und die letzte mit $r$. Ist $r$ nicht grösser als $n$, so hat man hiermit die niedrigste Form gefunden. Ist aber $r > n$, so setze man in die letzte Stelle $n$, und indem man von da aus allmälich rückwärts geht in jede Stelle das möglichst hohe Element bis die Summe $r$ erreicht ist. So hat man die niedrigste Form für ${}^{r}\overset{m}{C}\,(0_m, 1_m, \ldots n_m)$. Soll diese dagegen für ${}^{r}\overset{m}{C}\,(1_m, 2_m \ldots n_m)$ gefunden werden, so fülle man alle Stellen, die letzte ausgenommen, mit 1 aus und setze in die letzte $r - (m - 1)$, ist $r - (m - 1)$ nicht grösser als $n$, so hat man hiermit die gesuchte Form. Im entgegengesetzten Falle muss man wieder in die letzte Stelle $n$ setzen und allmälich rückwärts gehend in jede Stelle das möglichst hohe Element bis man eine Summe erreicht hat, welche die Summe der vorhergehenden Einheiten zu $r$ ergänzt.

15

Durch ein ähnliches Verfahren findet man auch ${}^{r}\overset{m}{V}(0, 1, 2 \ldots n)$

und ${}^{r}\overset{m}{V}(1, 2 \ldots n)$. Die niedrigste Form erhält man auch hier, indem man alle Stellen, die letzte ausgenommen, mit dem niedrigsten Elemente besetzt, und die letzte mit der Ergänzung der Summe der vorhergehenden Elemente zu $r$, wenn diese Ergänzung nicht grösser als $n$ ist. Ist sie aber grösser, so setzt man in die letzte Stelle $n$, und indem man allmälich rückwärts geht, in jede Stelle das möglichst hohe Element, bis man eine Summe erreicht hat, welche die Summe der vorhergehenden Elemente zu $r$ ergänzt.

Um aus einer bereits gebildeten Form die nächst höhere abzuleiten, sucht man die späteste Stelle auf, in welcher sich ein Element befindet das sich noch erhöhen lässt und welchem in irgend einem Abstande ein Element folgt, welches erniedrigt werden kann. Man erhöhe das einer Erhöhung fähige Element um eine Einheit, besetze die folgenden Stellen, die letzte ausgenommen, mit dem niedrigsten Elemente und in die letzte die Ergänzung der Summe der vorhergehenden zu $r$.

Ist diese Ergänzung grösser als $n$, so muss man wieder so verfahren wie es bereits im ähnlichen Falle bei Bildung der niedrigsten Form angegeben wurde.

Soll ${}^{r}\overset{m}{V}(0, 1, 2 \ldots r)$ entwickelt werden, (da ein höheres Element als $r$ doch Nichts mehr zur Summe $r$ beitragen kann) so kann man dies finden, indem man voraussetzt, dass die Variationen der $m-1$ten Klasse aus diesen Elementen zu allen Summen von 0 bis $r$ bereits gebildet sind. Man braucht nemlich dann nur hinter jede in ${}^{k}\overset{m-1}{V}(0, 1, 2 \ldots r)$ enthaltene Form noch das Element $r-k$ aus der $m$ten Reihe zu setzen, wodurch man offenbar eine Gruppe Formen bildet, welche zu ${}^{r}\overset{m}{V}(0, 1, 2 \,.\,.\, r)$ gehört. Indem man dann für $k$ allmälich alle Zahlen von 0 bis $r$ setzt, erhält man nothwendig alle in ${}^{r}\overset{m}{V}(0, 1, 2 \ldots r)$ enthaltenen Formen. Käme nemlich in diesem Ausdruck noch eine andere Form vor, welche etwa in der letzten Stelle das Element $s$ enthielte, und man schnitte dieses Element ab, so bliebe eine Form übrig die zur Klasse $m-1$ und zur Summe $r-s$ gehörte, während doch voraus-

gesetzt wird, dass man allen diesen Formen das Element $s$ hinzugefügt hat.

16.

Nimmt man an, dass die einzelnen Variationsformen durch Addition verbunden seyn sollen, die einzelnen Elemente einer jeden Form aber durch Multiplikation, und bezeichnet man in diesem Falle durch ${}^{k}\overset{m-1}{V}$ die Summe der Formen, welche in ${}^{k}\overset{m-1}{V}(0, 1 \ldots r)$ enthalten sind, so hat man mithin

$$ {}^{r}\overset{m}{V} = {}^{r}\overset{m-1}{V}.0 + {}^{r-1}\overset{m-1}{V}.1 + {}^{r-2}\overset{m-1}{V}.2 + \ldots + {}^{0}\overset{m-1}{V}.r $$

Bedenkt man aber zugleich, dass die Ziffern $0, 1, 2 \ldots r$, welche in dieser Formel als Faktoren erscheinen, nicht mit ihrem Zahlenwerthe zu nehmen sind, sondern das 0te 1te...$r$te Element der $m$ten Reihe bezeichnen, und nimmt man an, dass die Elemente dieser Reihe in Wahrheit durch $a_0, a_1 \ldots a_r$ ausgedrückt werden, so hat man, wenn man auch in ${}^{r}\overset{m-1}{V}$, ${}^{r-1}\overset{m-1}{V}$ u. s. w. statt der Ziffern die entsprechenden durch Buchstaben und angehängte Indices ausgedrückten Elemente setzt,

$$ 5) \quad {}^{r}\overset{m}{V} = {}^{r}\overset{m-1}{V}.a_0 + {}^{r-1}\overset{m-1}{V}.a_1 + {}^{r-2}\overset{m-1}{V}.a_2 + \ldots + {}^{0}\overset{m-1}{V}.a_r \; {}^{*)} $$

wo sich nun die Summe $r$ auf die Summe der Indices bezieht.

Nimmt man aber noch ferner an, dass die Reihen identisch sind und dass die Elemente einer jeden Reihe durch $a_0, a_1, \ldots a_r$ bezeichnet werden, so folgt aus §. 12 (Form. 4)

$$ 6) \qquad {}^{r}\overset{m}{V} = {}^{r}\overset{m}{Cp} $$

wo also ${}^{r}\overset{m}{Cp}$ die Summe der Combinationen der $m$ten Klasse zur Summe $r$ aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $a_0\ a_1 \ldots a_r$, jede Combination mit ihrer Permutationszahl multiplicirt, bedeutet, unter der Voraussetzung, dass die einzel-

---

*) Ist $m = 1$ so ist ${}^{r}\overset{1}{V} = a_r$; um also auch diesen Fall durch die allgemeine Formel auszudrücken, muss man ${}^{0}\overset{0}{V} = 1$, dagegen die sämmtlichen übrigen Ausdrücke ${}^{1}\overset{0}{V}, {}^{2}\overset{0}{V} \ldots {}^{r}\overset{0}{V}$, der Null gleich setzen.

nen Formen durch Addition und die Elemente jeder Form durch Multiplikation verbunden sind. Alsdann geht Formel 5) in

7) $\overset{m}{{}^{r}Cp} = \overset{m-1}{{}^{r}Cp} \, . \, a_0 + \overset{m-1}{{}^{r-1}Cp} \, . \, a_1 \, . \, . \, . + \overset{m-1}{{}^{0}Cp} \, . \, a_r$ *)

über.

## 17.

Unter den so eben gemachten Voraussetzungen, dass nemlich alle Reihen identisch und die Elemente jeder Reihe $a_0, a_1 \ldots a_r$ sind, dass ferner die Formen durch Addition und die Elemente jeder Form durch Multiplikation verbunden sind, kann man $\overset{m}{{}^{r}V}$, oder, was dasselbe sagt, $\overset{m}{{}^{r}Cp}$, noch auf eine andere Weise ausdrücken, wovon wir später (§. 32) eine wichtige Anwendung machen werden. Man nehme nemlich an es seyen $\overset{m}{{}^{0}Cp}, \overset{m}{{}^{1}Cp} \ldots$ bis $\overset{m}{{}^{r-1}Cp}$ bereits bekannt. Man hebe ferner aus den Formen, welche $\overset{m+1}{{}^{r}Cp}$ ausmachen, diejenigen heraus in welchen $m_0$ mal das Element $a_0$, $m_1$ mal das Element $a_1$ u.s.w. vorkommt; das Element $a_r$ wird also $m_r$ mal darin enthalten seyn, so dass mithin $m_r$ nur Null oder 1 seyn kann, sowie auch einzelne der übrigen Zahlen $m_0$, $m_1$ u.s.w. Null seyn können. Man bezeichne die Summe dieser Formen durch $\overset{m+1}{{}^{r}Cp} (m_0, m_1 \ldots m_r)$, indem man durch $\overset{m+1}{{}^{r}C} (m_0, m_1 \ldots m_r)$ diejenige unter den Combinationen der $m+1$ten Klasse zur Summe $r$ bezeichnet, in welcher $m_0$ mal das Element $a_0$, $m_1$ mal das Element $a_1$ u. s. w. vorkommt. Es ist also $\overset{m+1}{{}^{r}Cp} (m_0, m_1 \ldots m_r)$ nichts Anderes als die mit ihrer Permutationszahl multiplicirte Combination $\overset{m+1}{{}^{r}C} (m_0, m_1 \ldots m_r)$, also (§. 9)

8) $$\overset{m+1}{{}^{r}Cp} (m_0, m_1 \ldots m_r)$$
$$= \frac{1 \, . \, 2 \, \ldots \ldots (m+1)}{1 \, . \, 2 \ldots m_0 \, . \, 1 \, . \, 2 \ldots m_1 \, . \, 1 \, . \, 2 \ldots m_2 \ldots \ldots 1 \, . \, 2 \ldots m_r} \overset{m+1}{{}^{r}C} (m_0, m_1 \ldots m_r)$$

*) Auch hier muss man $\overset{0}{{}^{0}Cp} = 1$, dagegen $\overset{0}{{}^{1}Cp}, \overset{0}{{}^{2}Cp} \ldots \overset{0}{{}^{r}Cp}$ der Null gleich setzen.

wobei nur zu bemerken ist, dass wenn z.B. $m_0 = 0$ ist, auch das Produkt $1 \cdot 2 \ldots m_0$ wegfällt, und so bei den übrigen Zahlen $m_1$, $m_2$ u. s. w.

Man lasse nun in allen Formen, aus welchen ${}^{r}\overset{m+1}{C}p\,(m_0, m_1 \ldots m_r)$ besteht, das Element $a_1$ (wenn es überhaupt darin vorkommt) einmal weniger vorkommen. Die hierdurch entstehenden neuen Formen werden also zu ${}^{r-1}\overset{m}{C}p$ gehören, und zwar, dem Vorhergehenden entsprechend, durch ${}^{r-1}\overset{m}{C}p\,(m_0, m_1-1, m_2 \ldots m_r)$ zu bezeichnen seyn, die einzelne hierin enthaltene Combinationsform wird aber $\frac{{}^{r}\overset{m+1}{C}\,(m_0, m_1 \ldots m_r)}{a_1}$ seyn und man hat mithin

$$\text{A)} \qquad {}^{r-1}\overset{m}{C}p\,(m_0, m_1-1, m_2 \ldots m_r)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \ldots m}{1.2 \ldots m_0 . 1.2 \ldots (m_1-1) . 1.2 \ldots m_2 \ldots 1.2 \ldots m_r} \; \frac{{}^{r}\overset{m+1}{C}(m_0, m_1 \ldots m_r)}{a_1}$$

Lässt man dagegen in allen Formen, aus welchen ${}^{r}\overset{m+1}{C}p\,(m_0, m_1 \ldots m_r)$ besteht, das Element $a_2$ (wenn es überhaupt darin vorkommt) einmal weniger vorkommen, so werden die hierdurch entstehenden neuen Formen zu ${}^{r-2}\overset{m}{C}p$ gehören und durch ${}^{r-2}\overset{m}{C}p\,(m_0, m_1, m_2-1, \ldots m_r)$ zu bezeichnen seyn und es ist

$$\text{B)} \qquad {}^{r-2}\overset{m}{C}p\,(m_0, m_1, m_2-1, \ldots m_r)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots m}{1.2 \ldots m_0 . 1.2 \ldots m_1 . 1.2 \ldots (m_2-1) \ldots 1.2 \ldots m_r} \; \frac{{}^{r}\overset{m+1}{C}(m_0, m_1 \ldots m_r)}{a_2}$$

Es ist leicht zu sehen wie diese Formeln fortzusetzen sind, wenn man ebenso das Element $a_3$ oder das Element $a_4$ u.s.w. einmal weniger vorkommen lässt. Nun soll aber, indem man $m_0$ mal die Zahl Null, $m_1$ mal die Zahl 1 u.s.w. nimmt und die Produkte addirt, die Summe $r$ herauskommen, d. h. man soll

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 \ldots + r \cdot m_r = r$$

haben. Man kann daher statt der Formel 8) auch schreiben

$$r\overset{m+1}{Cp}(m_0,\ m_1\ \ldots\ m_r)$$
$$=\frac{m_1+2m_2+3m_3+\ldots+rm_r}{r}\cdot\frac{1\ .\ 2\ .\ .\ (m+1)}{1.2..m_0.1.2..m_1\ldots1.2..m_r}r\overset{m+1}{C}(m_0,m_1,\ldots m_r)$$

oder

$$r\overset{m+1}{Cp}(m_0,m_1,\ldots m_r)=\frac{m+1}{r}\left[\frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ m_0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ .\ (m_1-1)\ .\ 1\ .\ 2\ .\ .\ m_2\ldots}\right.$$
$$\left.+\,2\cdot\frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ m_0\ .\ 1\ .\ 2\ldots m_1\ .\ 1\ .\ 2\ldots(m_2-1)\ldots}+\ldots\right]r\overset{m+1}{C}(m_0,m_1,\ldots m_r)$$
$$=\frac{m+1}{r}\left[a_1\cdot\frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1.2..m_0.1.2\ldots(m_1-1).1.2..m_2\ldots}\ \frac{r\overset{m+1}{C}(m_0,m_1\ldots m_r)}{a_1}\right.$$
$$\left.+\,2a_2\cdot\frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1.2..m_0.1.2\ldots m_1.1.2\ldots(m_2-1)\ldots}\ \frac{r\overset{m+1}{C}(m_0,m_1\ldots m_r)}{a_2}+\ldots\right]$$

Berücksichtigt man nun die oben gefundenen Werthe A) und B) so folgt

$$r\overset{m+1}{Cp}(m_0,\ m_1\ \ldots\ m_r)=\frac{m+1}{r}\left[a_1\,r-1\overset{m}{Cp}(m_0,\ m_1-1,\ m_2\ldots m_r)\right.$$
$$\left.+\,2a_2\,r-2\overset{m}{Cp}(m_0,m_1,m_2-1,\ldots m_r)+\ldots+ra_r\,{}^{0}\overset{m}{Cp}(m_0,m_1\ldots,m_r-1)\right]$$

In demselben Zusammenhange, wie er durch diese Gleichung ausgedrückt wird, steht nun auch jede andere zu ${}^{r}\overset{m+1}{Cp}$ gehörende Gruppe $r\overset{m+1}{Cp}(l_0,\ l_1\ \ldots\ l_r)$ mit den entsprechenden Gruppen $r-1\overset{m}{Cp}(l_0,\ l_1-1,\ \ldots\ l_r)$, $r-2\overset{m}{Cp}(l_0,l_1,l_2-1,\ldots l_r)$ u. s. w. welche bezüglich zu $r-1\overset{m}{Cp}$, $r-2\overset{m}{Cp}$ u. s. w. gehören. Addirt man daher einerseits alle diese zu $r\overset{m+1}{Cp}$ gehörenden Gruppen, wodurch man diesen Ausdruck selbst erhält, und andererseits alle entsprechenden Gruppen, welche zu $r-1\overset{m}{Cp}$, $r-2\overset{m}{Cp}$ u.s.w. gehören, wodurch man diese Ausdrücke selbst erhält, so findet man mithin

$$9)\quad {}^{r}\overset{m+1}{Cp}=\frac{m+1}{r}\left[a_1\ r-1\overset{m}{Cp}+2a_2\ r-2\overset{m}{Cp}\ \ldots+ra_r\ {}^{0}\overset{m}{Cp}\right]$$

Aus 7) folgt aber, wenn man $m+1$ statt $m$ setzt,

10) ${}^{r}\overset{m+1}{C}p = a_0 \,.\, {}^{r}\overset{m}{C}p + a_1 .\, {}^{r-1}\overset{m}{C}p + a_2\, {}^{r-2}\overset{m}{C}p \;.\;.\;.\; + a_r\, {}^{0}\overset{m}{C}p$
zieht man hiervon die Formel 9) ab, so ergiebt sich

$$a_0 . {}^{r}\overset{m}{C}p + a_1 \left(1 - \frac{m+1}{r}\right) {}^{r-1}\overset{m}{C}p + a_2 \left(1 - \frac{2(m+1)}{r}\right) {}^{r-2}\overset{m}{C}p \ldots$$
$$+ a_r \left(1 - \frac{r(m+1)}{r}\right) {}^{0}\overset{m}{C}p$$

oder

11) $${}^{r}\overset{m}{C}p = \frac{a_1 [m+1-r]\, {}^{r-1}\overset{m}{C}p + a_2 [2(m+1)-r]\, {}^{r-2}\overset{m}{C}p \ldots + a_r [r(m+1)-r]\, {}^{0}\overset{m}{C}p}{r a_0}$$

18.

Nimmt man unter Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen (§. 17) an, das Element $a_0$ habe den Werth Null, so werden alle dieses Element enthaltenden Formen, da es als Faktor darin enthalten ist, wegfallen, d. h. mit anderen Worten, es werden die Combinationen nur aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_r$ zu bilden seyn. Die kleinste Summe, zu welcher in diesem Falle Combinationen der $m$ten Klasse gebildet werden können, ist $m$ selbst, d. h. ${}^{0}\overset{m}{C}p$, ${}^{1}\overset{m}{C}p \ldots {}^{m-1}\overset{m}{C}p$ fallen weg und die Formel 9) verwandelt sich in

12) $${}^{r}\overset{m+1}{C}p = \frac{m+1}{r} \left[a_1\, {}^{r-1}\overset{m}{C}p + 2a_2\, {}^{r-2}\overset{m}{C}p \ldots + (r-m) a_{r-m}\, {}^{m}\overset{m}{C}p\right]$$

wobei vorausgesetzt wird, dass $r > m$ ist, da man sonst aus $m+1$ Elementen, nicht die Summe $r$ herstellen könnte, während das niedrigste Element schon die Einheit als Beitrag zu dieser Summe giebt.

Bezeichnet man, unter denselben Voraussetzungen, durch ${}^{r}V$ die Summe aller Variationen zur Summe $r$ aus allen verschiedenen Klassen, gebildet aus den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_r$, so nehme man an es sey ${}^{r-1}V$, ${}^{r-2}V \ldots {}^{1}V$, d. h. die Gesammtheit der Variationen zu allen niedrigeren Summen, bereits gebildet; dann hat man

13) ${}^{r}V = a_1 .\, {}^{r-1}V + a_2 .\, {}^{r-2}V + \ldots + a_{r-1} .\, {}^{1}V + a_r .$

Denkt man sich nemlich ${}^{r}V$ bereits gebildet und stellt man die darin enthaltenen Formen so in Gruppen zusammen, dass man alle mit demselben Elemente beginnenden zu derselben Gruppe rechnet, so müssen, wenn man dieses Element abschneidet, alle Variationsformen übrig bleiben, welche zu der Summe gehören, die um den Index des abgeschnittenen Elements kleiner als $r$ ist. Mithin giebt die mit $a_1$ beginnende Gruppe, wenn man dieses Element abschneidet, ${}^{r-1}V$, die mit $a_2$ beginnende Gruppe giebt ebenso ${}^{r-2}V$ u.s.w. Das Element $a_r$ giebt schliesslich schon für sich allein die Summe $r$.

Versteht man unter ${}^{r}Cp$ die Summe der Combinationen aus allen Klassen zur Summe $r$, gebildet aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $a_1, a_2 \ldots a_r$, jede Form mit ihrer Permutationszahl multiplicirt, so kann man statt der vorhergehenden Gleichung auch schreiben

14) ${}^{r}Cp = a_1 \,.\, {}^{r-1}Cp + a_2 \,.\, {}^{r-2}Cp + \ldots + a_{r-1} \,.\, {}^{1}Cp + a_r.$

## Drittes Kapitel.

## Addiren, Subtrahiren und Multipliciren der Reihen.

### 19.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zur Aufgabe der algebraischen Analysis zurück, das Rechnen mit Reihen zu entwickeln (§. 4). Insofern aber hierbei combinatorische Operationen an den Coefficienten der Reihen auszuführen sind (§. 6), wird es angemessen seyn, die Coefficienten durch die Bezeichnung, welche im vorhergehenden Kapitel für die Elemente eingeführt wurde, anzudeuten. Wir werden den Coefficienten der nullten Potenz von $x$ als das nullte Element, den Coefficienten der ersten Potenz als das erste Element u.s.w. ansehen und schreiben

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

als Repräsentanten einer solchen Reihe. Der Index jedes Coefficienten ist identisch mit dem Exponenten der dazu gehörenden Potenz von $x$. In der Folge wollen wir jedoch kürzer

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

schreiben. Das Glied $a_0$ nennt man das **Anfangsglied**, das Glied $a_1 x^1$ das **erste**, $a_2 x^2$ das **zweite** u. s. w. Im Allgemeinen hat man sich diese Reihe als eine unbegrenzt zu immer höheren Potenzen aufsteigende zu denken, man kann sich aber auch eine aus einer endlichen Gliederzahl bestehende Reihe darunter denken, indem man alle auf ein bestimmtes Glied folgenden Glieder verschwinden lässt (§. 3).

Da alle Glieder der Reihe nach demselben Gesetze gebaut sind, und sich nur der Zahlenwerth des Index und Exponenten von einem Gliede zum anderen ändert, so kann man sie durch einen alle umfassenden Ausdruck darstellen.

In dem Ausdruck $a_r x^r$ sind nemlich alle einzelnen Glieder der Reihe enthalten, die man einzeln erhält, wenn man allmälich statt $r$ die einzelnen Werthe 0, 1, 2 u. s. w. setzt. Einen solchen Ausdruck nennt man das **allgemeine Glied** der Reihe und mit Hülfe desselben kann man die ganze Reihe kürzer durch eine sogenannte **Summenformel** andeuten. Man bedient sich hierbei gewöhnlich des griechischen Buchstaben $\Sigma$ welchen man dann das **Summenzeichen** nennt. Sollen die Glieder der Reihe ins Unendliche fortlaufen, so schreibt man statt dieser Reihe die Summenformel

$$\overset{r}{\underset{0,\infty}{\Sigma}} a_r x^r$$

wo das unter dem Summenzeichen stehende $0, \infty$ andeutet dass man statt des über dem Summenzeichen stehenden $r$, wo dieser Buchstabe in dem allgemeinen Gliede $a_r x^r$ vorkommt, allmälich die Zahlen 0, 1, 2 bis ins Unendliche zu setzen und die entstehenden Werthe zu addiren hat. Wäre dagegen die endliche Reihe

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

zu betrachten, so wäre die ihr entsprechende Summenformel $\overset{r}{\underset{0,k}{\Sigma}} a_r x^r$. Im Folgenden wird jedoch der Fall am häufigsten vorkommen, wo für $r$ alle Zahlen von Null bis ins Unendliche zu setzen sind, und es soll dann zur Abkürzung statt $\overset{r}{\underset{0,\infty}{\Sigma}}$ nur das

einfache Zeichen $\Sigma$ gesetzt werden, so dass $\Sigma a_r x^r$ dasselbe bedeutet wie $\overset{r}{\underset{0,\infty}{\Sigma}} a_r x^r$.

20.

Es sind zwei Reihen

1) $a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \ldots + a_r x^r + \ldots$

2) $b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 \ldots + b_r x^r + \ldots$

gegeben. Wenn man die einzelnen Glieder aus beiden Reihen, welche gleiche Potenzen von $x$ enthalten, nach ihrer Ordnung zusammenaddirt und hierdurch die Reihe

3) $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x^1 + (a_2 + b_2) x^2 \ldots + (a_r + b_r) x^r + \ldots$

bildet, so nennt man diese Operation die Addition der zwei gegebenen Reihen; die Reihe 3) ist die dieser Addition entsprechende Summe. Dies wird symbolisch auf folgende Weise ausgedrückt

$$\Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r \doteqdot \Sigma (a_r + b_r) x^r$$

Das Zeichen $\doteqdot$ soll das Zeichen des Entsprechens heissen.

Addirt man jedes Glied der Reihe

4) $c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 \ldots + c_r x^r + \ldots$

nach ihrer Ordnung zu jedem Gliede der Reihe 3) welches dieselbe Potenz von $x$ enthält, so erhält man die Reihe

5) $(a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) x^1 + \ldots + (a_r + b_r + c_r) x^r + \ldots$

Hierdurch sind die drei Reihen 1) 2) und 4) addirt und die Reihe 5) ist die dieser Addition entsprechende Summe. Man hat daher

$$\Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r + \Sigma c_r x^r \doteqdot \Sigma (a_r + b_r + c_r) x^r$$

Man sieht wie auf dieselbe Weise eine beliebige Anzahl Reihen addirt und die ihrer Addition entsprechende Summe gebildet werden kann. Man sieht ferner, dass die entsprechende Summe auch unmittelbar dadurch gebildet werden kann, dass man die gleiche Potenzen von $x$ enthaltenden Glieder aus allen zu addirenden Reihen nach ihrer Ordnung zusammenaddirt und aus den so entstehenden Gliedern wieder eine Reihe bildet. Auch folgt hieraus, dass die entsprechende Summe immer dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man die gegebenen Rei-

hen nehmen mag. Es giebt also nur eine einzige Reihe, welche die der Addition einer Anzahl Reihen entsprechende Summe ist.

## 21.

Zieht man die einzelnen Glieder der Reihe 2) von den Gliedern der Reihe 1), welche dieselbe Potenz von $x$ enthalten, nach ihrer Ordnung ab und bildet die Reihe

6) $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\, x^1 + (a_2 - b_2)\, x^2 \ldots + (a_r - b_r)\, x^r + \ldots$

so nennt man diese Operation die Subtraktion der Reihe 2) von der Reihe 1), und die Reihe 6) die dieser Subtraktion entsprechende Differenz, was man durch

$$\Sigma\, a_r x^r - \Sigma\, b_r x^r \mp \Sigma\, (a_r - b_r)\, x^r$$

ausdrückt. Es ist klar dass es nur eine einzige Reihe giebt, welche die der Subtraktion zweier gegebener Reihen entsprechende Differenz ist.

## 22.

Man betrachte die Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_r \ldots$ der Reihe 1) und die Coefficienten $b_0, b_1 \ldots b_r \ldots$ der Reihe 2) als zwei Elementenreihen, aus welchen man die Variationen zur Summe 0, zur Summe 1 u.s.w. bildet, und zwar unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Variationsformen durch Addition, die einzelnen Elemente jeder Form durch Multiplikation verbunden sind. Die Gesammtheit dieser Variationen zur Summe 0, zur Summe 1 u.s.w. bezeichnen wir bezüglich durch ${}^0\overset{2}{V}$, ${}^1\overset{2}{V}$ u.s.w. (§. 16). Bildet man nun die Reihe

7) $${}^0\overset{2}{V} + {}^1\overset{2}{V} x^1 + {}^2\overset{2}{V} x^2 \ldots + {}^r\overset{2}{V} x^r + \ldots$$

so nennt man diese Operation die Multiplikation der Reihen 1) und 2) und die Reihe 7) das dieser Multiplikation entsprechende Produkt. Man drückt dies durch

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, \Sigma\, b_r x^r \mp \Sigma\, {}^r\overset{2}{V} x^r$$

aus. Hierbei ist also

$${}^r\overset{2}{V} = a_r b_0 + a_{r-1} b_1 + \ldots a_0 b_r$$

In dem besonderen Falle, wenn die Reihe 2) nur aus dem

Anfangsgliede $b_0$ besteht, während $b_1$, $b_2$ u. s. w. sämmtlich Null sind, ist ${}^{r}\overset{2}{V} = a_r b_0$ und daher

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, b_0 \;\ddagger\; \Sigma\, b_0 a_r x^r$$

Setzt man noch ausserdem $b_0 = 1$ so hat man

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, 1 \;\ddagger\; \Sigma\, a_r x^r$$

Betrachtet man bei der Bildung der Variationen die Elementenreihe $a_0\; a_1 \ldots$ als die erste und die Elementenreihe $b_0\; b_1 \ldots$ als die zweite (§. 11) so nennt man die Reihe 1) den Multiplikand und die Reihe 2) den Multiplikator. Da es aber für die Bildung der Variationen vollkommen gleichgültig ist, welche der zwei Elementenreihen man als die erste ansieht (§. 11), so gilt hier, ähnlich wie in der Arithmetik, der Satz, dass das entsprechende Produkt dasselbe bleibt, wenn man Multiplikand und Multiplikator mit einander vertauscht.

Auch folgt aus der Bildung des Produktes, dass es nur eine einzige Reihe giebt, welche das der Multiplikation zweier bestimmten Reihen entsprechende Produkt ist.

## 23.

Die Multiplikation der drei Reihen 1), 2) und 4) besteht ebenso darin dass man aus den drei Elementenreihen $a_0, a_1 \ldots$; $b_0, b_1 \ldots$; $c_0, c_1 \ldots$ die Variationen zur Summe 0, zur Summe 1 u. s. w. bildet und zwar wieder unter der Voraussetzung, dass alle Formen durch Addition, alle Elemente einer Form durch Multiplikation verbunden sind. Bezeichnet man die Gesammtheit dieser Variationen zur Summe 0, zur Summe 1 u.s.w. bezüglich durch ${}^{0}\overset{3}{V}$, ${}^{1}\overset{3}{V}$ u.s.w., so ist die Reihe

$${}^{0}\overset{3}{V} + {}^{1}\overset{3}{V} x^1 + {}^{2}\overset{3}{V} x^2 \ldots + {}^{r}\overset{3}{V} x^r + \ldots$$

das der Multiplikation der drei Reihen 1), 2) und 4) entsprechende Produkt. Dies drückt man durch

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, \Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, c_r x^r \;\ddagger\; \Sigma\, {}^{r}\overset{3}{V} x^r$$

aus. Die Multiplikation dreier Reihen kann auch dadurch ausgeführt werden, dass man zuerst zwei dieser Reihen mit einander multiplicirt, z. B. die Reihen 1) und 2) und das dieser Multiplikation entsprechende Produkt 7) bildet, alsdann aber dieses Produkt mit der Reihe 4) multiplicirt, und wieder das

dieser Multiplikation entsprechende Produkt bildet. Um letzteres zu finden muss man nemlich aus den zwei Elementenreihen ${}^{0}\overset{2}{V}$, ${}^{1}\overset{2}{V}$ . . . und $c_0$, $c_1$ . . . die Variationen zur Summe 0, 1 u.s.w. bilden (wobei ${}^{0}\overset{2}{V}$ als das nullte, ${}^{1}\overset{2}{V}$ als das erste Element u.s.w. der ersten Reihe zu betrachten ist). Der Inbegriff der Variationen zur Summe $r$ aus diesen zwei Reihen ist mithin

$$ {}^{r}\overset{2}{V} \, . \, c_0 + {}^{r-1}\overset{2}{V} \, . \, c_1 + {}^{r-2}\overset{2}{V} \, . \, c_2 \, . \, . \, . + {}^{0}\overset{2}{V} \, . \, c_r $$

Setzt man diesen Ausdruck $= D_r$ so hat man demnach

$$ \Sigma \; {}^{r}\overset{2}{V} \, x^r \, . \, \Sigma \, c_r x^r \mp \Sigma \, D_r \, x^r $$

Nun ist aber auch (§. 16, Form. 5)

$$ {}^{r}\overset{3}{V} = {}^{r}\overset{2}{V} \, . \, c_0 + {}^{r-1}\overset{2}{V} \, . \, c_1 + \, . \, . \, . \; {}^{0}\overset{2}{V} \, . \, c_r $$

also $D_r = {}^{r}\overset{3}{V}$ oder

$$ \Sigma \; {}^{r}\overset{2}{V} \, . \, x^r \; \Sigma \, c_r \, x^r \mp \Sigma \; {}^{r}\overset{3}{V} x^r $$

man erhält also dieselbe Reihe, als wenn man die drei Reihen 1) 2) und 4) unmittelbar mit einander multiplicirt hätte. Umgekehrt kann man hieraus auch noch folgenden Schluss ziehen. Hat man zugleich

$$ \Sigma \, a_r x^r \, . \, \Sigma \, b_r x^r \, . \, \Sigma \, c_r \, x^r \mp \Sigma \; {}^{r}\overset{3}{V} \; x^r $$

und

$$ \Sigma \, k_r \; x^r \, . \, \Sigma \, c_r x^r \mp \Sigma \; {}^{r}\overset{3}{V} x^r $$

so muss auch

8) $$ \Sigma \, a_r x^r \, . \, \Sigma \, b_r x^r \mp \Sigma \, k_r \, x^r $$

seyn, da $k_r = {}^{r}\overset{2}{V}$ seyn muss.

Da die Variationen aus drei Elementenreihen unverändert bleiben, wenn man auch die Ordnung der Elementenreihen verändert (§. 11), so kann man die zu multiplicirenden Reihen in beliebiger Ordnung nehmen, das der Multiplikation entsprechende Produkt bleibt immer dasselbe.

Man sieht nun leicht, wie diese Betrachtungen auf jede beliebige Anzahl Reihen ausgedehnt werden können. Eine gegebene Anzahl Reihen mit einander multipliciren, heisst: aus ihnen eine neue Reihe, das ihrer Multiplikation entsprechende Produkt, dadurch bilden,

dass man die Coefficienten jeder der gegebenen Reihen als eine Elementenreihe, und zwar den Coefficienten von $x^r$ als das $r$te Element, ansieht, aus diesen die Variationen zu den Summen 0, 1 u.s.w. bildet, indem man die Formen durch Addition, die Elemente jeder Form durch Multiplikation verbindet, und allgemein den Inbegriff der Variationen zu irgend einer Summe als Coefficienten der Potenz von $x$, deren Exponent dieser Summe gleich ist, nimmt. Werden also $m$ Reihen mit einander multiplicirt, so wird das entsprechende Produkt die Form

$$ {}^0\overset{m}{V} + {}^1\overset{m}{V} x^1 \ldots + {}^r\overset{m}{V} x^r + \ldots $$

haben, wofür auch $\Sigma\, {}^r\overset{m}{V}\, x^r$ gesetzt werden kann.

Deutet man durch $P, Q, R \ldots p, q, r \ldots$ einzelne Reihen an, und führt die Multiplikation der Reihen $P, Q, R, \ldots$ auf dasselbe entsprechende Produkt, wie die Multiplikation der Reihen $p, q, r, \ldots$ so sagen wir dass die Produkte $PQR\ldots$ und $pqr\ldots$ sich entsprechen und deuten dies durch

$$ PQR \;\hat{=}\; pqr \ldots $$

an.

## Viertes Kapitel.

## Dividiren der Reihen.

---

### 24.

Es sind zwei Reihen

$$ 1)\quad a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_r x^r + \ldots. $$

$$ 2)\quad b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_r x^r + \ldots. $$

gegeben, man soll aus diesen Reihen eine Reihe

$$ 3)\quad A_0 + A_1 x^1 + \ldots + A_r x^r + \ldots. $$

bilden, so beschaffen, dass die Reihe 1) das der Multiplikation der Reihen 2) und 3) entsprechende Produkt ist (§. 22). Kann man die Reihe 3) wirklich bilden, und es soll sogleich gezeigt werden, dass dies immer der Fall ist, so nennt man diese Operation die Division der Reihe 1) durch die Reihe 2), die erste Reihe den Dividend, die zweite den Divisor

und die Reihe 3) den dieser Division entsprechenden Quotienten.

Vermöge dieser Definition soll man also (§. 22)

$$4)\quad \Sigma b_r x^r \,.\, \Sigma A_r x^r \doteqdot \Sigma a_r x^r$$

haben, wofür man, der Bezeichnung der Division in der Arithmetik ähnlich,

$$5)\quad \frac{\Sigma a_r x^r}{\Sigma b_r x^r} \doteqdot \Sigma A_r x^r$$

schreibt, so dass der Ausdruck 5) durchaus nichts Anderes sagt, als dass der Ausdruck 4) statt hat.

Bezeichnet man nun durch ${}^r\overset{2}{V}$ den Inbegriff der Variationen zur Summe $r$ gebildet aus den Elementenreihen $b_0, b_1 \ldots$ und $A_0, A_1 \ldots\ldots$ so ist

$$\Sigma b_r x^r \,.\, \Sigma A_r x^r \doteqdot \Sigma\, {}^r\overset{2}{V} x^r$$

die Reihe $\Sigma\, {}^r\overset{2}{V} x^r$ muss also mit der Reihe $\Sigma a_r x^r$ identisch seyn, also $a_r = {}^r\overset{2}{V}$. Hieraus folgt

$a_r = b_0 A_r + b_1 A_{r-1} + b_2 A_{r-2} \ldots + b_{r-1} A_1 + b_r A_0$

und

$$6)\quad A_r = \frac{a_r - b_r A_0 - b_{r-1} A_1 \ldots\ldots - b_1 A_{r-1}}{b_0}$$

Sobald mithin die Werthe von $A_0, A_1 \ldots A_{r-1}$ bestimmt sind, giebt die Formel 6) den Werth von $A_r$. Nun ist $a_0 = {}^0\overset{2}{V} = b_0 A_0$ also

$$A_0 = \frac{a_0}{b^0}$$

Die Formel 6) giebt demnach, wenn man $r = 1$ setzt,

$$A_1 = \frac{a_1 - b_1 A_0}{b_0}$$

Die Werthe von $A_0$ und $A_1$ sind hiermit bestimmt. Setzt man ferner $r = 2$, so giebt die Formel 6)

$$A_2 = \frac{a_2 - b_2 A_0 - b_1 A_1}{b_0}$$

und indem man so fortfährt, den Werth jedes beliebigen $A_r$. Diese Werthe sind aber ganz bestimmte, folglich ist auch der Quotient immer ein ganz bestimmter, d. h. es giebt

immer eine und nur eine Reihe 3) welche der entsprechende Quotient der Division der Reihe 1) durch die Reihe 2) ist.

25.

Das Verfahren, durch welches hier der Coefficient des $r$ten Gliedes des Quotienten gefunden wird, ist wesentlich verschieden von dem, durch welches der Coefficient des $r$ten Gliedes des der Multiplikation zweier Reihen entsprechenden Produkts bestimmt wurde. Im letzteren Falle konnte nemlich dieser Coefficient unmittelbar aus den Grössen, aus welchen er zusammengesetzt ist, nemlich aus den Coefficienten des Multiplikands und des Multiplikators, gefunden werden, indem man nur Variationen aus ihnen zu bilden hatte, ohne dass es nöthig war noch Hülfsgrössen zu berechnen. Eine solche unmittelbare Bestimmung nennt man ein independentes Verfahren. Die Formel 6) dagegen, durch welche $A_r$ bestimmt wird, zeigt nicht wie $A_r$ aus den Coefficienten des Dividends und des Divisors zusammengesetzt ist, sie führt vielmehr auf die vorhergehenden Coefficienten $A_{r-1}, A_{r-2} \ldots A_0$ zurück, welche sie als bereits berechnet voraussetzt. Dies nennt man ein rekurrirendes Verfahren *).

*) Unsere Betrachtung setzt voraus, dass das Anfangsglied der Reihe 2) nicht Null ist. Wäre $b_0 = 0$ und nicht zugleich auch $a_0 = 0$, so wäre es nicht mehr möglich dem Quotienten die von uns angenommene Form zu geben. Denn da nun die Variationen aus den zwei Reihen $b_1, b_2 \ldots$ und $A_0, A_1 \ldots$ gebildet werden sollen, und in der ersten dieser Reihen das nullte Element $b_0$ fehlt, so ist es nicht mehr möglich ${}^0\overset{2}{V}$ zu bilden, während doch ${}^0\overset{2}{V} = a_0$ seyn soll. Ist dagegen auch $a_0 = 0$, so dass in der That ${}^0\overset{2}{V}$ wegfällt, so hat man ${}^1\overset{2}{V} = A_0 b_1 = a_1$ also

$$A_0 = \frac{a_1}{b_1}$$

und allgemein ${}^r\overset{2}{V} = b_1 A_{r-1} + b_2 A_{r-2} \ldots + b_r A_0 = a_r$

oder $\quad {}^{r+1}\overset{2}{V} = b_1 A_r + b_2 A_{r-1} \ldots . + b_{r+1} A_0 = a_{r+1}$

also $\quad A_r = \dfrac{a_{r+1} - b_{r+1} A_0 \ldots . . - b_2 A_{r-1}}{b_1}$

so dass wieder allgemein $A_r$ durch das rekurrirende Verfahren bestimmt wird.

26.

Will man die sämmtlichen Glieder des Quotienten von $A_0$ bis $A_r$ berechnen, so wird das rekurrirende Verfahren das einfachste seyn. Die wissenschaftliche Behandlung der Division kann aber erst dann als abgeschlossen betrachtet werden, wenn das Gesetz nachgewiesen ist, nach welchem die Coefficienten des Quotienten unmittelbar aus den Coefficienten des Divisors und Dividenden zu bilden, also durch ein independentes Verfahren zu finden sind. Nun ist allerdings $A_0$ schon independent bestimmt worden, nemlich $A_0 = \frac{a_0}{b_0}$, setzt man diesen Werth in die rekurrirende Formel für $A_1$, in welcher neben $A_0$ nur noch Coefficienten der zwei gegebenen Reihen vorkommen, so ist auch $A_1$ independent bestimmt, und so fortfahrend kann man allmälich für alle Coefficienten des Quotienten die independenten Werthe finden. Indessen werden die auf diesem Wege gefundenen Ausdrücke bald so verwickelt, dass es nicht leicht möglich ist, das zu Grunde liegende Bildungsgesetz daraus zu erkennen. Es soll daher ein anderer Weg eingeschlagen werden.

27.

Man betrachte nemlich zunächst den besonderen Fall, wenn $a_0 = 1$ und die übrigen Coefficienten der Reihe 1) verschwinden. Ferner sey $b_0 = 1$, so dass mithin die Formel 5) in

$$7) \quad \frac{1}{\Sigma\, b_r\, x^r} = \Sigma\, A_r\, x^r \text{ *)}$$

übergeht und die Formel 6) in

$$8) \quad A_r = -\, b_1\, A_{r-1} - b_2\, A_{r-2} \ldots - b_r\, A_0$$

Man sieht dass jetzt der Werth von $A_r$ aus Gliedern besteht, die nach einem und demselben Gesetze gebildet sind, indem

*) Der Sinn dieser Formel ist also, dass das der Multiplikation der zwei Reihen $\Sigma\, b_r\, x^r$ und $\Sigma\, A_r\, x^r$ entsprechende Produkt so beschaffen seyn muss, dass sein Anfangsglied (welches zu $x^0$ gehört) die Einheit ist, während die Coefficienten der folgenden Potenzen von $x$ Null sind.

bei jedem Gliede die Indices der darin vorkommenden $b$ und $A$ sich zu der Summe $r$ ergänzen, und es lässt sich daher erwarten, dass, in Folge dieser Symmetrie der rekurrirenden Formel, auch die independente Bestimmung einfacher ausfallen wird. Da im Allgemeinen $A_0 = \frac{a_0}{b_0}$ so ist nun $A_0 = 1$, man hat also

$$A_r = - b_1 A_{r-1} - b_2 A_{r-2} \dots - b_r$$

Setzt man in dieser Formel

$$- b_1 = \beta_1, - b_2 = \beta_2 \dots - b_r = \beta_r$$

so geht sie in

9) $A_r = \beta_1 A_{r-1} + \beta_2 A_{r-2} \dots + \beta_r$

über. Bezeichnet man aber durch ${}^rV$ die Summe aller Variationen aus allen Klassen zur Summe $r$, gebildet aus den Elementen $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_r$, wobei die Elemente jeder Form durch Multiplikation verbunden sind, so hat man (§. 18 Form. 13)

10) ${}^rV = \beta_1 \, {}^{r-1}V + \beta_2 \, {}^{r-2}V + \dots + \beta_r$

Der Vergleich der Formeln 9) und 10) zeigt, dass $A_r$ nach demselben Gesetze aus den vorhergehenden $A_{r-1}, A_{r-2}, \dots A_1$ gebildet wird, wie ${}^rV$ aus ${}^{r-1}V$, ${}^{r-2}V$, .... ${}^1V$. Nun ist $A_1 = - b_1 A_0 = \beta_1$ und auch ${}^1V = \beta_1$, folglich $A_1 = {}^1V$; ferner ${}^2V = \beta_1 \, {}^1V + \beta_2$ und $A_2 = \beta_1 A_1 + \beta_2$, mithin auch $A_2 = {}^2V$, und indem man so fortgeht, allgemein $A_r = {}^rV$. Nun ist aber ${}^rV = {}^rCp$ (§. 18) folglich auch

11) $A_r = {}^rCp$

welches die gesuchte independente Bestimmung von $A_r$ für den jetzt betrachteten Fall ausdrückt. In Worten heisst dies: Um, wenn der Dividend und das Anfangsglied des Divisors der Einheit gleich sind, den Coefficienten des $r$ten Gliedes des Quotienten zu finden, bilde man aus den mit umgekehrten Zeichen genommenen Coefficienten des ersten, zweiten u. s. w. Gliedes des Divisors, welche man als das erste, zweite u. s. w. Element ansieht, die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung aus allen Classen zur Summe $r$ und multiplicire jede Form mit der dazu gehörenden Permutationszahl, verbinde alle so gebildeten Ausdrücke durch Addition und alle Elemente jeder Form durch Multiplikation. In Zeichen ausgedrückt heisst dies

$$12) \quad \frac{1}{\Sigma b_r x^r} \doteq \Sigma\, {}^r Cp x^r$$

wobei, da $A_0 = 1$, auch unter dem Symbol ${}^0Cp$ die Einheit zu verstehen ist.

Z. B. es soll in dem Ausdruck

$$\frac{1}{1+2x-3x^2+4x^3\ldots\ldots} \doteq 1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots$$

der Werth von $A_3$ auf independentem Wege gefunden werden.

Hier ist $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = -4$, diese Werthe sind also bezüglich das erste, zweite, dritte Element, und da nun die Combinationen zur Summe 3 zu bilden sind, so können die höheren Elemente, d. h. die folgenden Coefficienten des Divisors keinen Beitrag dazu liefern und brauchen ebendeswegen nicht bekannt zu seyn. Man hat aber ${}^3C = \beta_1\beta_1\beta_1,\ \beta_1\beta_2,\ \beta_3$. Die erste und dritte dieser Formen kann nicht permutirt werden, zu der mittleren gehört die Permutationszahl 2. Mithin ist

$${}^3Cp = \beta_1\beta_1\beta_1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3$$

und wenn man statt $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ ihre Werthe setzt,

$${}^3Cp = (-2.-2.-2) + 2(-2.3) + (-4) = -24$$

also

$$A_3 = -24$$

## 28.

Man betrachte nun den allgemeineren Fall, wenn der Dividend die Reihe 1) ist, behalte aber die Beschränkung bei, dass das Anfangsglied des Divisors $= 1$ ist. Man hat also

$$13) \quad \frac{\Sigma a_r x^r}{\Sigma b_r x^r} \doteq \Sigma A_r x^r$$

d. h.

$$14) \quad \Sigma b_r x^r.\ \Sigma A_r x^r \doteq \Sigma a_r x^r$$

Aus 12) folgt aber

$$\Sigma b_r x^r.\ \Sigma\, {}^r Cp.x^r \doteq 1$$

demnach ist es einerlei ob man das Produkt sucht, welches der Multiplikation der drei Reihen $\Sigma b_r x^r$, $\Sigma {}^r Cp x^r$, $\Sigma a_r x^r$ entspricht, oder das Produkt welches $1.\Sigma a_r x^r$ entspricht (§. 23). Nun ist aber (§. 22)

$$1.\ \Sigma a_r x^r \doteq \Sigma a_r x^r$$

also auch

$$\Sigma\, b_r x^r.\ \Sigma\, {}^rCpx^r.\ \Sigma\, a_r x^r \doteqdot \Sigma\, a_r x^r$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 14), so folgt (§. 23. Form. 8)

$$\Sigma\, {}^rCpx^r.\ \Sigma\, a_r x^r \doteqdot \Sigma\, A_r x^r$$

d. h.

$$(1 + {}^1Cpx + {}^2Cpx^2 + \ldots + {}^rCpx^r + \ldots)\,(a_0 + a_1 x \ldots + a_r x^r + \ldots)$$
$$\doteqdot A_0 + A_1 x \ldots + A_r x^r + \ldots$$

woraus

15) $A_r = a_r + {}^1Cpa_{r-1} + {}^2Cpa_{r-2} \ldots + {}^rCpa_0$

folgt, wodurch auch in diesem Falle die Coefficienten des Quotienten auf independentem Wege bestimmt sind. Die Combinationen behalten dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Falle und beziehen sich also wieder auf die Elemente $-b_1$, $-b_2$ u. s. w.

## 29.

Auf den so eben behandelten Fall kann nun leicht der allgemeinste Fall zurück geführt werden, in welchem die Formel 4) statt findet, ohne dass der Werth von $b_0$ auf die Einheit beschränkt wird. Insofern nemlich die Reihe $b_0 + b_1 x + \ldots$ das der Multiplikation der Reihe $1 + \frac{b_1}{b_0} x + \frac{b_2}{b_0} x^2 + \ldots$ mit $b_0$ entsprechende Produkt ist, kann man auch schreiben

16) $b_0\,.\ \Sigma\, \frac{b_r}{b_0} x^r\,.\ \Sigma\, A_r x^r \doteqdot \Sigma\, a_r x^r$

Setzt man aber

17) $\dfrac{\Sigma\, a_r x^r}{\Sigma\, \frac{b_r}{b_0} x^r} \doteqdot \Sigma\, D_r x^r$

so findet man, da das Anfangsglied des Divisors die Einheit ist, aus dem Vergleich dieser Formel mit der Formel 13) dass der Werth von $D_r$ sich aus dem Werthe von $A_r$ in Formel 15) ergeben muss, wenn man in dieser allgemein $\frac{b_r}{b_0}$ statt $b_r$ setzt. Man hat mithin

18) $D_r = a_r + {}^1Cp\, a_{r-1} + \ldots + {}^rCp\, a_0$

wo sich nun das Combinationszeichen auf $\frac{-b_1}{b_0}$, $\frac{-b_2}{b_0}$ u.s.w. als erstes, zweites Element u.s.w. bezieht.

Verbindet man nun den Ausdruck $\Sigma \frac{b_r}{b_0} x^r . \Sigma D_r x^r + \Sigma a_r x^r$, welcher aus 17) folgt, mit dem Ausdruck 16), so ergiebt sich

$$b_0 \, \Sigma A_r x^r + \Sigma D_r x^r$$

also

$$b_0 A_r = D_r$$

d. h.

$$A_r = \frac{a_r + {}^1Cp\, a_{r-1} + \ldots {}^rCp\, a_0}{b_0}$$

wo ${}^rCp$ dieselbe Bedeutung wie in 18) hat. Hiermit ist die independente Bestimmung der Coefficienten des Quotienten im allgemeinsten Divisionsfalle erledigt.

Fünftes Kapitel.

## Potenziren der Reihen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz.

---

### 30.

Ein einzelner Fall aus der im 3ten Kapitel behandelten allgemeinen Theorie der Multiplikation bietet ein besonderes Interesse dar. Wenn man nemlich eine Reihe

$$1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots .$$

mehrmals mit sich selbst multiplicirt und das entsprechende Produkt sucht, so nennt man dies die Reihe potenziren. Man erhebt die Reihe auf die $m$te Potenz, wenn man sie $m$ mal mit sich multiplicirt.

Man nennt aber eine Reihe von der Form der Reihe 1) ein Polynom und daher die Entwickelung des Gesetzes, nach welchem die Glieder des einer Potenz des Polynoms entsprechenden Produkts gebaut sind, den polynomischen Lehrsatz und dieses Produkt selbst die Polynomialreihe.

Bezeichnet man die $m$te Potenz der Reihe 1) durch

$(a_0 + a_1 x + \ldots)^m$ oder durch $[\Sigma a_r x^r]^m$ und das entsprechende Produkt durch $\Sigma A_r x^r$, so hat man mithin

$$2)\qquad [\Sigma a_r x^r]^m \doteq \Sigma A_r x^r$$

Aus dem Schluss des §. 23 folgt also unmittelbar

$$A_r = {}^r\overset{m}{V}$$

Da aber die zu multiplicirenden Reihen identisch, mithin die Variationen nur aus der einzigen Elementenreihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu bilden sind, hat man (§. 16 Form. 6)

$$3)\qquad A_r = {}^r\overset{m}{Cp}$$

und hiermit ist die independente Entwickelung (§. 25) des polynomischen Lehrsatzes erledigt. Man findet also nach Form. 3)

$$A_0 = {}^0\overset{m}{Cp} = \overset{m}{a_0}$$

$$A_1 = {}^1\overset{m}{Cp} = \overset{m-1}{a_0} \cdot a_1 \cdot \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots(m-1)} = m \cdot \overset{m-1}{a_0} \cdot a_1$$

$$A_2 = {}^2\overset{m}{Cp} = \overset{m-2}{a_0} \cdot \overset{2}{a_1} \cdot \frac{1\ldots m}{1\ldots(m-2).1.2} + \overset{m-1}{a_0} \cdot a_2 \frac{1\ldots m}{1\ldots(m-1)}$$

$$= \frac{m(m-1)}{1.2} \overset{m-2}{a_0} \cdot \overset{2}{a_1} + m\overset{m-1}{a_0} \cdot a_2$$

. . . . . . . . . . .

31.

Ist $a_0 = 0$, so sind auch ${}^0\overset{m}{Cp}$, ${}^1\overset{m}{Cp} \ldots {}^{m-1}\overset{m}{Cp}$ sämmtlich Null, da diese Ausdrücke in allen Gliedern den Faktor $a_0$ enthalten und erst ${}^m\overset{m}{Cp} = \overset{m}{a_1}$ ist nicht Null. Mithin verschwinden auch $A_0$, $A_1 \ldots A_{m-1}$ und die Polynomialreihe beginnt mit $A_m x^m$. Die Formel 2) geht also in

$$(a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_r x^r)^m \doteq A_m x^m + A_{m+1} x^{m+1} \ldots + A_{m+r} x^{m+r} + \ldots$$

über. Statt dessen kann man auch schreiben

$$x^m (a_1 + a_2 x \ldots + a_r x^{r-1} + \ldots)^m \doteq x^m (A_m + A_{m+1} x^{m+1} \ldots + A_{m+r} x^r \ldots)$$

also

$(a_1 + a_2 x .. + a_r x^{r-1} ...)^m \ddagger A_m + A_{m+1} x ... + A_{m+r} x^r + ....$
oder

$(a_1 + a_2 x ... + a_r x^{r-1} ...)^m \ddagger {}^{m}\overset{m}{C}p + {}^{m+1}\overset{m}{C}px ... + {}^{m+r}\overset{m}{C}px^r + ....$
Setzt man nun $A_m = B_0$, $A_{m+1} = B_1 ... A_{m+r} = B_r$ so ist

$$(a_1 + a_2 x ... + a_r x^{r-1} ...)^m \ddagger B_0 + B_1 x ... + B_r x^r + ....$$

wo $B_r = {}^{m+r}\overset{m}{C}p$, und die Combinationen aus den Elementen $a_1$, $a_2$ . . . zu bilden sind.

## 32.

Auch die rekurrirende Entwickelung des polynomischen Lehrsatzes ist leicht zu geben. Soll nemlich $A_r$ aus den als bekannt angenommenen $A_0$, $A_1 ... A_{r-1}$ gefunden werden, so braucht man nach Form. 3) nur zu wissen wie ${}^{r}\overset{m}{C}p$ aus den bekannten ${}^{0}\overset{m}{C}p$, ${}^{1}\overset{m}{C}p ... {}^{r-1}\overset{m}{C}p$ gefunden wird. Diese Frage ist aber bereits im zweiten Kapitel (Formel 11) erledigt worden. Man hat mithin

$$4)\quad A_r = \frac{[m+1-r]a_1 A_{r-1} + [2(m+1)-r]a_2 A_{r-2} .... + [r(m+1)-r]a_r A_0}{r a_0}$$

und damit die verlangte Recursionsformel.

Geht man von dem oben gefundenen Werthe

$$A_0 = (a_0)^m$$

aus, so findet man durch diese Formel, wenn $r = 1$

$$A_1 = \frac{m \cdot a_1 A_0}{a_0} = m(a_0)^{m-1} a_1$$

wie ebenfalls schon gefunden wurde. Ist $r = 2$ so hat man

$$A_2 = \frac{(m-1)a_1 A_1 + 2m a_2 A_0}{2a_0} = \frac{m(m-1)}{1.2} a_0^{m-2} \cdot a_1^2 + m a_0^{m-1} \cdot a_2$$

u. s. w.

Sollen alle Coefficienten von $A_0$ bis $A_r$ gefunden werden, so ist offenbar das rekurrirende Verfahren wieder bequemer als das independente (vgl. §. 25).

33.

In dem besonderen Falle, wenn alle Coefficienten der Reihe 1), die zwei ersten $a_0$ und $a_1$ ausgenommen, verschwinden, wenn also das Polynom in ein Binom übergeht, geht der polynomische Lehrsatz in den binomischen über, die Polynomialreihe in die Binomialreihe. Statt der Formel 2) hat man nun

$$5) \qquad (a_0 + a_1 x)^{m} \ddagger \Sigma A_r x^r \quad .$$

und nach Form. 3)

$$A_r = {}^{r}\overset{m}{C}p$$

Allein da nun die Combinationen nur aus den zwei Elementen $a_0$ und $a_1$ zu bilden sind, so ist ${}^{m}\overset{m}{C}$ die letzte die noch gebildet werden kann, während ${}^{m+1}\overset{m}{C}$ u. s. w. verschwinden. Die Binomialreihe muss also mit dem Gliede $A_m x^m$ abbrechen und man hat

$$6) \qquad (a_0 + a_1 x)^{m} \ddagger \sum_{0,m}^{r} A_r x^r$$

Es lässt sich aber $A_r$ jetzt in einer anderen einfachen Form ausdrücken. Da nemlich die Summe $r$ in ${}^{r}\overset{m}{C}p$ nur durch $r$maliges Setzen des Elements $a_1$ erzeugt wird, so muss der Faktor $(a_1)^r$ ein Bestandtheil von ${}^{r}\overset{m}{C}p$ seyn, und da die Anzahl der zusammentretenden Elemente $m$ seyn soll, so muss jedes der noch fehlenden $m-r$ Elemente $a_0$ seyn. Man hat mithin ${}^{r}\overset{m}{C} = a_0^{m-r} \,.\, a_1^{r}$. Die hierzu gehörende Permutationszahl ist $\frac{1.2\ldots m}{1.2\,(m-r).1.2\ldots r}$ also

$$7) \quad A_r = {}^{r}\overset{m}{C}p = \frac{1.2\ldots\ldots m}{1.2..(m-r).1.2\ldots r}\, a_0^{m-r} \,.\, a_1^{r}$$

womit die independente Entwickelung des Binoms — für ganze positive Exponenten — gefunden ist.

34.

Die hier vorkommende Permutationszahl nennt man den

*r*ten Binomialcoefficienten der Potenz *m*, im Folgenden soll sie durch das Zeichen $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ angedeutet werden. Man setzt also

$$8)\quad \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}{1\,.\,2\,.\,.\,(m-r)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}$$

woraus man zwei einfache Ausdrücke ableiten kann, nemlich

$$9)\quad \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}$$

$$10)\quad \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,.\,.\,.\,(r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-r)}$$

Vergleicht man den Ausdruck 9) mit Kap. 2 Form. 2, so folgt

$$11)\quad \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = N\overset{r}{C}(1,\,2\,.\,.\,.\,m)$$

d. h. der *r*te Binomialcoefficient der *m*ten Potenz ist nichts Anderes als die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus *m* Elementen zur *r*ten Classe *). Dass hier ein neues Zeichen für diesen Begriff eingeführt wird, geschieht darum, weil später (§. 40) der Begriff der Binomialcoefficienten auf einen Fall ausgedehnt wird, für welchen das combinatorische Zeichen nicht mehr passt.

Man setze nun allgemein

$$12)\qquad A_r = \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}\,\overset{m-r}{a_0}\,.\,\overset{r}{a_1}$$

Da $A_0 = \overset{m}{a_0}$ so ist $\overset{0}{{}_m\mathfrak{B}} = 1$. Diesen Werth kann man weder aus Formel 8) noch aus Formel 9) direkt finden, da $r=0$, also diese Formeln sinnlos werden, dagegen giebt Formel 10)

$$\overset{0}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,.\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m} = 1$$

Aus $A_m = \overset{m}{{}_mCp} = \overset{m}{a_1}$ folgt ebenso $\overset{m}{{}_m\mathfrak{B}} = 1$. Hier ist $r = m$

*) Da die Anzahl der Combinationen, der Natur der Sache nach, immer eine ganze Zahl ist, so folgt daraus, dass auch $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ eine solche ist, sobald, wie hier vorausgesetzt wird, *m* eine ganze positive Zahl ist.

und nun verlieren Formel 8) und 10) ihren Sinn während Formel 9)

$$ {}_{m}\mathfrak{B}^{m} = \frac{m \,.\, m-1 \,\ldots\ldots\, 1}{1 \,.\, 2 \,\ldots\, m} = 1 $$

giebt. Diese zwei Fälle abgerechnet kann jede der drei Formeln zur Berechnung der Binomialcoefficienten gebraucht werden, obgleich Formel 9), wie sich später (§. 40) zeigen wird, die brauchbarste ist.

## 35.

Setzt man in 9) statt $r$ den Werth $m-r$, so hat man

$$ {}_{m}\mathfrak{B}^{m-r} = \frac{m \,.\, (m-1) \,\ldots\ldots\, (r+1)}{1 \,\ldots\ldots\, (m-r)} $$

also nach 10)

$$ 13) \qquad {}_{m}\mathfrak{B}^{m-r} = {}_{m}\mathfrak{B}^{r} $$

d. h. die Binomialcoefficienten, welche gleich weit, der eine vom Endgliede der Entwickelung, nemlich dem $m$ten, der andere vom Anfangsgliede, dem 0ten, abstehen, sind gleich. Also nicht blos, wie schon gefunden wurde, ${}_{m}\mathfrak{B}^{0} = {}_{m}\mathfrak{B}^{m}$, da beide $= 1$, sondern auch ${}_{m}\mathfrak{B}^{1} = {}_{m}\mathfrak{B}^{m-1}$, ${}_{m}\mathfrak{B}^{2} = {}_{m}\mathfrak{B}^{m-2}$ u. s. w.

In Folge dieser Eigenschaft braucht man also die Binomialcoefficienten **nur bis zur Mitte der Binomialreihe** zu berechnen, da sie von da an in umgekehrter Ordnung wiederkehren. Jedoch sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $m$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Da nemlich die Binomialreihe mit $A_0 x^0$ beginnt und mit $A_m x^m$ endigt (Form. 6), also $m+1$ Glieder enthält, so wird ihre Gliederzahl, wenn $m$ ungerade ist, eine gerade, und wenn $m$ gerade ist, eine ungerade seyn. Im **ersten Fall** setze man $m+1 = 2k$, es entspricht nun jedem der ersten $k$ Binomialcoefficienten ein gleicher unter den letzten $k$ Binomialcoefficienten. Es giebt also in diesem Falle keinen **mittleren** Binomialcoefficienten, oder, wenn man will, kann man ${}_{m}\mathfrak{B}^{k-1}$ und ${}_{m}\mathfrak{B}^{k}$ als die mittleren ansehen. Man hat aber

$$ {}_m\mathfrak{B}^{k-1} = \frac{m\,.\,(m-1)\,\ldots\,.\,(m-k+2)}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,(k-1)} $$

oder, wenn man für $k$ seinen Werth $\frac{m+1}{2}$ setzt,

$$ 14)\quad {}_m\mathfrak{B}^{k-1} = {}_m\mathfrak{B}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m\,.(m-1)\ldots\left[\frac{m+3}{2}\right]}{1\,.\,2\,\ldots\left[\frac{m-1}{2}\right]} $$

und denselben Werth findet man für ${}_m\mathfrak{B}^{k} = {}_m\mathfrak{B}^{\frac{m+1}{2}}$.

Im zweiten Falle setze man $m = 2k$ also $m + 1 = 2k+1$. Hier entspricht wieder jedem der ersten $k$ Binomialcoefficienten ein gleicher unter den letzten, in der Mitte zwischen diesen paarweise gleichen Binomialcoefficienten steht aber ein einzelner ${}_m\mathfrak{B}^{k}$ welcher ebendeswegen der mittlere genannt wird. Und zwar ist

$$ {}_m\mathfrak{B}^{k} = \frac{m\,.\,(m-1)\,\ldots\,.\,(m-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,k} $$

oder, indem man $\frac{m}{2}$ statt $k$ setzt,

$$ 15)\quad {}_m\mathfrak{B}^{\frac{m}{2}} = \frac{m\,(m-1)\ldots\left[\frac{m}{2}+1\right]}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{m}{2}} $$

## 36.

Ein anderes Mittel die Berechnung der Binomialcoefficienten abzukürzen, bietet die Bemerkung, dass man jeden derselben aus dem unmittelbar vorhergehenden finden kann, wenn man letzteren mit einer bestimmten Zahl multiplicirt. Denn aus

$$ {}_m\mathfrak{B}^{r} = \frac{m\,.\,(m-1)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r} $$

$$ {}_m\mathfrak{B}^{r+1} = \frac{m\,.\,(m-1)\ldots(m-r+1)\,(m-r)}{1\,.\,2\,\ldots\,r\,.\,(r+1)} $$

folgt

$$16)\quad \overset{r+1}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{m-r}{r+1} \cdot \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$$

Nun weiss man dass $\overset{0}{{}_m\mathfrak{B}} = 1$, also kann man, von diesem ausgehend, alle folgenden Binomialcoefficienten auf rekurrirendem Wege finden. Hieraus folgt weiter, wenn man Formel 12) berücksichtigt,

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{\overset{r+1}{{}_m\mathfrak{B}}}{\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}} \cdot \frac{a_0^{m-(r+1)} \cdot a_1^{r+1}}{a_0^{m-r} \cdot a_1^{r}} = \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_0}$$

also

$$17)\quad A_{r+1} = \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_0} A_r$$

wodurch die rekurrirende Entwickelung des Binoms gegeben ist.

Aus Formel 16) ergiebt sich zugleich, dass die Binomialcoefficienten bis zum mittleren, wenn ein solcher vorhanden ist, oder bis zu den zwei gleichen mittleren, immer grösser werden, so dass dieser mittlere oder diese beiden mittleren Binomialcoefficienten die grössten unter allen sind. Ist nur ein mittlerer $\overset{\frac{m}{2}}{\mathfrak{B}}$ vorhanden und man setzt $r \leqq \frac{m}{2} - 1$, so ist $m - r \geqq \frac{m}{2} + 1$ und $r + 1 \leqq \frac{m}{2}$ also $\frac{m-r}{r+1} > 1$. Mithin so lange $r$ noch nicht $= \frac{m}{2}$ ist, $\overset{r+1}{{}_m\mathfrak{B}} > \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$.

Hat man zwei mittlere Glieder $\overset{\frac{m-1}{2}}{{}_m\mathfrak{B}}$ und $\overset{\frac{m+1}{2}}{{}_m\mathfrak{B}}$ und man setzt $r \leqq \frac{m-3}{2}$ so ist $m - r \geqq \frac{m+3}{2}$ und $r + 1 \leqq \frac{m-1}{2}$, also wieder $\frac{m-r}{r+1} > 1$. Ist dagegen $r = \frac{m-1}{2}$, so ist $m - r = \frac{m+1}{2}$ und $r + 1 = \frac{m+1}{2}$ also $\overset{\frac{m+1}{2}}{{}_m\mathfrak{B}} = \overset{\frac{m-1}{2}}{{}_m\mathfrak{B}}$, wie schon bekannt war.

37.

Addirt man die zwei aufeinander folgenden Binomialcoefficienten ${}_{m}\mathfrak{B}^{r}$ und ${}_{m}\mathfrak{B}^{r+1}$ zusammen, so erhält man

$${}_{m}\mathfrak{B}^{r} + {}_{m}\mathfrak{B}^{r+1} = \frac{m.(m-1)\dots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r} + \frac{m(m-1)\dots(m-r)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r+1)}$$

$$= \left(\frac{m-r}{r+1}+1\right)\left[\frac{m\,.\,(m-1)\,.\,.\,.\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}\right]$$

$$= \frac{m+1}{r+1}\cdot\frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r} = \frac{(m+1)m(m-1)\dots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r+1)}$$

Den letzten Ausdruck erhält man aber wenn man in Formel 9) $m+1$ statt $m$ und $r+1$ statt $r$ setzt. Man hat mithin

$$18)\qquad {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r+1} = {}_{m}\mathfrak{B}^{r} + {}_{m}\mathfrak{B}^{r+1}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Binomialcoefficienten jeder Potenz $m+1$ berechnen, wenn man die Binomialcoefficienten der vorhergehenden Potenz $m$ kennt. Zunächst hat man ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{0} = 1$, dann ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{1} = {}_{m}\mathfrak{B}^{0} + {}_{m}\mathfrak{B}^{1}$, ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{2} = {}_{m}\mathfrak{B}^{1} + {}_{m}\mathfrak{B}^{2}$ u. s. w.*)

*) Es ergiebt sich hieraus auch, dass man aus den Coefficienten irgend einer Potenz die der nächstvorhergehenden finden kann. Denn aus ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{1} = {}_{m}\mathfrak{B}^{0} + {}_{m}\mathfrak{B}^{1}$ folgt

$${}_{m}\mathfrak{B}^{1} = {}_{m+1}\mathfrak{B}^{1} - {}_{m}\mathfrak{B}^{0} = {}_{m+1}\mathfrak{B}^{1} - {}_{m+1}\mathfrak{B}^{0}$$

Nun ist ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{2} = {}_{m}\mathfrak{B}^{2} + {}_{m}\mathfrak{B}^{1}$ also

$${}_{m}\mathfrak{B}^{2} = {}_{m+1}\mathfrak{B}^{2} - {}_{m+1}\mathfrak{B}^{1} + {}_{m+1}\mathfrak{B}^{0}$$

Gesetzt man habe, indem man diese Betrachtung fortsetzt, für irgend einen bestimmten Werth $r$ gefunden, dass

$${}_{m}\mathfrak{B}^{r} = {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r} - {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r-1} + {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r-2}\dots \pm {}_{m+1}\mathfrak{B}^{0}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $r$ gerade oder ungerade, so fände man auch aus ${}_{m+1}\mathfrak{B}^{r+1} = {}_{m}\mathfrak{B}^{r+1} + {}_{m}\mathfrak{B}^{r}$

$${}_{m}\mathfrak{B}^{r+1} = {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r+1} - {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r} + {}_{m+1}\mathfrak{B}^{r-1}\dots \mp {}_{m+1}\mathfrak{B}^{0}$$

Nun ist nachgewiesen, dass diese Formel für $r = 1$, $r = 2$ wirklich

38.

Man kann auch den $r$ten Binomialcoefficienten einer Potenz finden, welche die Summe $a+b$ zweier Zahlen $a$ und $b$ ist, wenn man die Binomialcoefficienten vom 0ten bis zum $r$ten für die zwei Potenzen $a$ und $b$ kennt. Um die entsprechende Formel zu finden, stellen wir zunächst die Binomialcoefficienten unter einem neuen Gesichtspunkte dar. Betrachtet man nemlich die Werthe der Binomialcoefficienten, welche Formel 9) und 10) geben, so sieht man dass sie aus einem Zähler und einem Nenner bestehen, welche beide Produkte sind, in denen jeder Faktor um eine Einheit von dem vorhergehenden verschieden ist. Ein solches Produkt ist als specieller Fall eines allgemeineren Ausdrucks anzusehen, in welchem man ein Produkt betrachtet, bei dem jeder Faktor um eine bestimmte Zahl grösser oder kleiner als der vorhergehende ist. Solche Produkte nennt man Faktoriellen oder Fakultäten; von ihren vielen merkwürdigen Eigenschaften betrachten wir hier nur einige einfache. Man bezeichne das Produkt $(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots(a+b+(r-1)k)$ durch $(a+b)^{r|k}$. Hierbei können $a$, $b$, $k$, sowohl ganze als gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen bedeuten, während $r$ eine ganze positive Zahl ist, welche die Anzahl der Faktoren bezeichnet. Ist $r=0$, so soll das Symbol $(a+b)^{0|k}$ die Einheit bedeuten; ist $r=1$, so ist $(a+b)^{1|k}=a+b$. Man hat demnach

$$19)\quad (a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+r-1) = (a+b)^{r|1}$$

---

statt hat, folglich ist sie allgemein richtig. Setzt man in dieser Formel $m=0$ und bedenkt dass ${}^{1}\overset{0}{\mathfrak{B}}=1$, ${}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}=1$ aber ${}^{1}\overset{2}{\mathfrak{B}}$, ${}^{1}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ u.s.w. Null sind, so folgt

$${}^{0}\overset{1}{\mathfrak{B}} = {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}} - {}^{1}\overset{0}{\mathfrak{B}} = 0$$

$${}^{0}\overset{2}{\mathfrak{B}} = {}^{1}\overset{2}{\mathfrak{B}} - {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{1}\overset{0}{\mathfrak{B}} = 0$$

und überhaupt ${}^{0}\overset{r}{\mathfrak{B}} = 0$ wenn $r > 0$, dagegen folgt aus ${}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}} = {}^{m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} - {}^{m}\overset{0}{\mathfrak{B}}$, dass ${}^{0}\overset{0}{\mathfrak{B}} = {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}} - {}^{0}\overset{1}{\mathfrak{B}} = 1$ zu setzen ist.

20) $(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-(r-1)) = (a+b)^{r|-1}$
21) $a\ (a+1)\ \ldots\ (a+r-1) = a^{r|1}$
22) $a\ (a-1)\ \ldots\ (a-(r-1)) = a^{r|-1}$
23) $1.\ 2\ \ldots\ r = 1^{r|1}$

Man erhält nemlich 21) aus 19), und 22) aus 20) indem man $b = 0$ setzt und 23) aus 21) indem man $a = 1$ setzt. Nach Formel 9) kann man also jeden Binomialcoefficienten als den Quotienten zweier Faktoriellen darstellen, nemlich

$$24)\qquad {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

Man hat offenbar

$$(a+b)^{1|-1} = a+b = {}^{1}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{1|-1} + {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}b^{1|-1}$$

$$(a+b)^{2|-1} = (a+b)(a+b-1) = a(a-1) + 2ab + b(b-1)$$

$$= {}^{2}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{2|-1} + {}^{2}\overset{1}{\mathfrak{B}}.a^{1|-1}.b^{1|-1} + {}^{2}\overset{2}{\mathfrak{B}}.b^{2|-1}$$

Gilt das hierbei sich zeigende Entwickelungsgesetz bis zu einem gewissen $r$, so dass bis dahin

$$25)\ (a+b)^{r|-1} = {}^{r}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{r|-1} + {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{r-1|-1}.b^{1|-1} + {}^{r}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{r-2|-1}b^{2|-1}\ldots$$
$$+ {}^{r}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}a^{1|-1}b^{r-1|-1} + {}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}b^{r|-1}$$

so ist die Formel auch für $r+1$ und mithin allgemein für jeden Werth von $r$ richtig. Multiplicirt man nemlich diesen Ausdruck mit $(a+b-r)$ so erhält man auf der linken Seite des Gleichheitszeichens $(a+b)^{r|-1}(a+b-r) = (a+b)^{r+1|-1}$. Auf der rechten Seite multiplicire man so mit $a+b-r$ dass man zuerst das erste Glied mit $a-r$, das zweite mit $a-(r-1)$ u.s.w., das letzte mit $a$, und dann das erste mit $b$, das zweite mit $b-1$ u.s.w., das letzte mit $b-r$ multiplicirt, alsdann erhält man

$$(a+b)^{r+1|-1} =$$
$${}^{r}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{r+1|-1} + {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{r|-1}.b^{1|-1} + \ldots + {}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{1|-1}.b^{r|-1}$$
$$+ {}^{r}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{r|-1}.b^{1|-1} + \ldots + {}^{r}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}a^{1|-1}b^{r|-1} + {}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}b^{r+1|-1}$$

Bemerkt man nun dass ${}^{r}\overset{0}{\mathfrak{B}} = {}^{r+1}\overset{0}{\mathfrak{B}}$, ${}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{r+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$ und

$\overset{k}{{}^{r}\mathfrak{B}} + \overset{k+1}{{}^{r}\mathfrak{B}} = \overset{k+1}{{}^{r+1}\mathfrak{B}}$ (Form. 18) so erhält man, wenn man die unter einander stehenden Glieder addirt,

$$(a+b)^{r+1|-1} = \overset{0}{{}^{r+1}\mathfrak{B}}a^{r+1|-1} + \overset{1}{{}^{r+1}\mathfrak{B}}a^{r|-1} . b^{1|-1}$$
$$+ \overset{2}{{}^{r+1}\mathfrak{B}}a^{r-1|-1} . b^{2|-1} \dots + \overset{r}{{}^{r+1}\mathfrak{B}}a^{1|-1} . b^{r|-1} + \overset{r+1}{{}^{r+1}\mathfrak{B}} . b^{r+1|-1}$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist. Nun gilt die Formel 25) für $r = 2$, mithin allgemein. Dividirt man alle Glieder dieser Formel mit $1.2 \dots r$ (wofür man nach 23) auch $1^{r|1}$ setzen kann) und berücksichtigt dass $\overset{0}{{}^{r}\mathfrak{B}} = 1$, $\overset{1}{{}^{r}\mathfrak{B}} = r$, $\overset{2}{{}^{r}\mathfrak{B}} = \dfrac{r(r-1)}{1 . 2}$ u.s.w. so findet man

$$26)\quad \frac{(a+b)^{r|-1}}{1^{r|1}} = \frac{a^{r|-1}}{1.2..r} + \frac{a^{r-1|-1}}{1.2....(r-1)} . \frac{b^{1|-1}}{1}$$
$$+ \frac{a^{r-2|-1}}{1.2....(r-2)} . \frac{b^{2|-1}}{1.2} + \dots + \frac{b^{r|-1}}{1.2..r}$$

Nach Formel 24) heisst dies aber

$$27)\quad \overset{r}{{}^{a+b}\mathfrak{B}} = \overset{r}{{}^{a}\mathfrak{B}} + \overset{r-1}{{}^{a}\mathfrak{B}} . \overset{1}{{}^{b}\mathfrak{B}} + \overset{r-2}{{}^{a}\mathfrak{B}} . \overset{2}{{}^{b}\mathfrak{B}} \dots + \overset{1}{{}^{a}\mathfrak{B}}\, \overset{r-1}{{}^{b}\mathfrak{B}} + \overset{r}{{}^{b}\mathfrak{B}}$$

und dies ist die im Anfang dieses Paragraphen gesuchte Formel.

Setzt man $r = a = b$, so erhält man

$$\overset{r}{{}^{2r}\mathfrak{B}} = \overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}} + \overset{r-1}{{}^{r}\mathfrak{B}} . \overset{1}{{}^{r}\mathfrak{B}} + \overset{r-2}{{}^{r}\mathfrak{B}} . \overset{2}{{}^{r}\mathfrak{B}} \dots + \overset{1}{{}^{r}\mathfrak{B}}\, \overset{r-1}{{}^{r}\mathfrak{B}} + \overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}}$$

Bedenkt man dass $\overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}} = \overset{0}{{}^{r}\mathfrak{B}} = 1$ und also auch $\overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}} = (\overset{0}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 = (\overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2$ gesetzt werden darf, und berücksichtigt man die Formel 13), so findet man

$$28)\quad \overset{r}{{}^{2r}\mathfrak{B}} = (\overset{0}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 + (\overset{1}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 + (\overset{2}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 \dots + (\overset{r-1}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 + (\overset{r}{{}^{r}\mathfrak{B}})^2 \text{ *)}.$$

---

*) Setzt man $m = 2r$ in Formel 9), so findet man $\overset{r}{{}^{2r}\mathfrak{B}} = \dfrac{2r(2r-1)\dots(r+1)}{1 . 2 \dots r}$. Multiplicirt man in diesem Ausdruck Zähler und Nenner mit $1 . 2 \dots r$, so geht er in $\dfrac{1 . 2 \dots 2r}{(1 . 2 \dots r)^2}$ über, oder, wenn man im Zähler die geraden Faktoren von den ungeraden

d. h. die Summe der Quadrate der sämmtlichen Binomialcoefficienten einer (ganzen positiven) Potenz ist dem mittleren Binomialcoefficienten (§. 35) der doppelten Potenz gleich.

## 39.

Setzt man in Formel 6) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, so geht sie in

$$29) \qquad (1 + x)^m = \sum_{0,m}^{r} A_r x^r$$

über, wo nun nach Formel 12)

$$A_r = {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$$

mithin

$$30) \qquad (1 + x)^m = \sum_{0,m}^{r} {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} \cdot x^r$$

Wenn es darauf ankommt, die Binomialformel zu entwickeln, braucht man nur diesen speciellen Fall zu betrachten, da sich der allgemeinere, wo man $(a_0 + a_1 x)^m$ zu betrachten hat, sofort auf diesen zurückführen lässt. Denn da man statt $(a_0 + a_1 x)^m$ auch $a_0^m (1 + \frac{a_1}{a_0} x)^m$ schreiben kann und nach Formel 30)

$$(1 + \frac{a_1}{a_0} x)^m = \sum_{0,m}^{r} {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} (\frac{a_1}{a_0} x)^r$$

so ist auch (§. 22)

$$(a_0 + a_1 x)^m = a_0^m \sum_{0,m}^{r} {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} (\frac{a_1}{a_0} x)^r = \sum_{0,m}^{r} {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} a_0^m (\frac{a_1}{a_0} x)^r.$$

## 40.

Bestimmt man den Werth von ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ durch Formel 8) oder Formel 10), so hat dieser Ausdruck nur dann eine bestimmte

---

scheidet, in $\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{2.4.6\ldots 2r}{1.2.3\ldots r} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{1.2.3\ldots r} \cdot 2^r = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r} 2^{2r}$. Setzt man den letzten Ausdruck statt ${}^{2r}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ so hat man die Formel 28) in der Gestalt, wie sie zuerst von dem berühmten französischen Mathematiker Lagrange gefunden worden ist.

Bedeutung, wenn, wie wir bis jetzt vorausgesetzt haben, $m$ eine ganze positive Zahl ist. Bestimmt man dagegen ${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}$ durch Formel 9) so behält dieser Ausdruck immer einen bestimmten Sinn, welche reelle Zahl man statt $m$ nimmt. Wir wollen daher, indem wir den Begriff des Binomialcoefficienten erweitern, unter dem Zeichen ${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}$, welches wir noch immer den $r$ten Binomialcoefficienten der Potenz $m$ nennen, den Ausdruck $\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}$ verstehen, wo $m$ irgend eine reelle Zahl bedeutet, sey sie nun eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale. Dagegen bleibt $r$ immer eine ganze positive Zahl. Auch soll ${}_m\overset{0}{\mathfrak{B}}$ unter allen Umständen die Einheit bedeuten. Zwischen den zwei Fällen, wo $m$ eine ganze positive Zahl und wo es keine solche ist, findet nur der Unterschied statt, dass im ersteren ${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}$ immer Null wird, sobald $r$ grösser als $m$ ist, weil dann der im Zähler von $\frac{m\,(m-1)\,.\,.\,.\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}$ vorkommende Faktor $m-r+1$ oder ein vorhergehender Null ist, während im zweiten Falle, welche ganze Zahl man für $r$ setzen mag, kein Faktor des Zählers Null wird, also auch ${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}$ niemals Null wird.

Es ist einleuchtend, dass die Formeln 16) und 18) auch bei dieser allgemeineren Bedeutung des Binomialcoefficienten unverändert ihre Geltung behalten, da sie unmittelbar aus Formel 9) abgeleitet sind. Es wurde ferner bemerkt, dass die Formel 20) für jeden reellen Werth von $a$ und $b$ gilt; die Definition von ${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}$, welche wir in Formel 24) gegeben haben, gilt also ebenfalls wenn $m$ irgend eine reelle Zahl ist. Aus dieser Formel und der Formel 18) wurde aber die Formel 27) abgeleitet, folglich behält auch diese ihre Gültigkeit, wenn $a+b$ irgend eine reelle Zahl ist. Dagegen verliert die Formel 13) und Alles was aus ihr abgeleitet wird, also nament-

lich die Formel 28), ihren Sinn, sobald $m$ keine ganze positive Zahl ist, weil sie auf Formel 10) beruht.

## 41.

Indem wir früher (§. 39) den binomischen Lehrsatz (für ganze positive Potenzen) auf seine einfachste Form zurückführten, erhielten wir die Formel 30). Wir hätten aber statt derselben auch schreiben können

$$31) \quad (1+x)^m \ddagger \Sigma\, {}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

d. h. wir hätten uns die Glieder der Summenformel als unbegrenzt fortlaufend denken können, da, wie eben bemerkt wurde, sobald $m$ eine ganze positive Zahl ist, alle auf ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ folgenden Binomialcoefficienten Null sind. Setzen wir aber für $m$ eine Zahl, die keine ganze positive ist, so werden die Glieder der Summenformel nicht blos scheinbar, sondern wirklich, ins Unendliche fortgehen. Es entsteht nun die Frage ob auch unter dieser Voraussetzung die Formel 31) noch einen Sinn behält?

Man nehme zuerst an, es sey $m$ ein positiver Bruch und setze $m = \frac{p}{q}$, wo $p$ und $q$ ganz positive Zahlen bedeuten. Man hätte also

$$32) \quad (1+x)^{\frac{p}{q}} \ddagger \Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

$$\text{oder} \quad (1+x)^{\frac{p}{q}} \ddagger 1 + {}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} x + {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} x^2 + \ldots {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r + \ldots$$

Wie nun in der Arithmetik die Gleichung

$$a^{\frac{p}{q}} = b$$

nichts anderes sagt als dass die Gleichung $b^q = a^p$ statt hat, ebenso müssen wir hier den Ausdruck 32) so verstehen, dass er nichts Anderes sagen soll, als dass der Ausdruck

$$33) \quad \left(1 + {}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} x + {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} x^2 + \ldots {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r + \ldots\right)^q \ddagger (1+x)^p$$

statt hat. Die Frage ist also darauf zurückgeführt, ob

wirklich die Entwickelung der $q$ten Potenz des Polynoms $1 + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1}x + \ldots$ auf dasselbe entsprechende Produkt führt, wie die Entwickelung der $p$ten Potenz des Binoms $1+x$. Da wir für beide Entwickelungen das Gesetz kennen, indem ja $p$ und $q$ ganze Zahlen sind, so wird die Antwort keine Schwierigkeit haben. Man setze

$$(1 + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1}x + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2}x^2 \ldots + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{r}x^r \ldots)^q = \Sigma A_r x^r$$

so ist, mit Formel 2) verglichen,

${}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1} = a_1$, ${}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2} = a_2$ u. s. w. und $q = m$ ferner $a_0 = A_0 = 1$ mithin nach Formel 4)

$$A_1 = q \,.\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1} = q \,.\, \frac{p}{q} = p = {}^{p}\mathfrak{B}^{1}$$

$$A_2 = \frac{(q-1) .\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1} . p + 2q .\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2}}{2} = \frac{(q-1)\frac{p}{q}.p + q\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2} = {}^{p}\mathfrak{B}^{2}$$

Ist aber bis zu einem bestimmten $r$ die Gleichung

$$A_{r-1} = {}^{p}\mathfrak{B}^{r-1}$$

richtig, so muss sie auch für $r + 1$ gelten. Denn da

$$A_r = \frac{(q+1-r)\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1} A_{r-1} + [2(q+1)-r]\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2} A_{r-2} \ldots + [r(q+1)-r]\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{r}}{r}$$

$$= \frac{(q+1-r)\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1} .\, {}^{p}\mathfrak{B}^{r-1} + [2(q+1)-r]\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2}\,{}^{p}\mathfrak{B}^{r-2} \ldots + [r(q+1)-r]\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{r}}{r}$$

so ist

$$A_r = \left[\frac{q+1}{r}\right]\left[{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1}\,{}^{p}\mathfrak{B}^{r-1} \ldots + r\,{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{r}\right]$$

$$- \left[{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{1}\,{}^{p}\mathfrak{B}^{r-1} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{2}\,{}^{p}\mathfrak{B}^{r-2} \ldots + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}^{r}\right]$$

oder da ${}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{p}{q}$, $2\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right) = \frac{p}{q} \cdot {}^{\frac{p}{q}-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}$ und allgemein $r\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{p}{q}\,{}^{\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$ ist, so hat man auch

$$A_r = \frac{q+1}{r} \cdot \frac{p}{q}\left[{}^{p}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{p}{q}-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{p}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\right]$$
$$- \left[{}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{p}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,{}^{p}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}\right]$$

Nun ist nach Formel 27), wenn man dort $r - 1$ statt $r$ und $a = p$, $b = \frac{p}{q} - 1$ setzt,

$$ {}^{p+\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = {}^{p}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{p}{q}-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{p}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$$

und wenn man in derselben Formel $a = p$, $b = \frac{p}{q}$ setzt,

$$ {}^{p+\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{p}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{p}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{p}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}$$

mithin $A_r = \frac{q+1}{r} \cdot \frac{p}{q} \cdot {}^{p+\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} - \left[{}^{p+\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} - {}^{p}\overset{r}{\mathfrak{B}}\right]$

nun ist

$$\frac{q+1}{r} \cdot \frac{p}{q}\,{}^{p+\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = \frac{p+\frac{p}{q}}{r} \cdot {}^{p+\frac{p}{q}-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = {}^{p+\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}$$

also $A_r = {}^{p}\overset{r}{\mathfrak{B}}$

Da aber die Richtigkeit dieser Gleichung für $r = 1$, $r = 2$ schon nachgewiesen worden ist, so gilt sie mithin allgemein und man hat demnach

$$\left[1 + {}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 \ldots\right]^q \ddagger \Sigma\,{}^{p}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$$

nun ist auch $\qquad (1 + x)^p \ddagger \Sigma\,{}^{p}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$

mithin $(1+x)^p \mp (1 + {}^{\frac{p}{q}}_{1}\mathfrak{B}.x + \ldots)^q$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \mp \Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r$$

Es ist damit bewiesen, dass die Binomialformel 31) auch für positive gebrochene rationale Werthe von $m$ gilt.

Man setze nun $m = -\frac{p}{q}$, wo $p$ und $q$ wieder ganze positive Zahlen bedeuten, und frage, ob die Formel

$$34)\qquad (1+x)^{-\frac{p}{q}} \mp \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r$$

noch eine Bedeutung hat.

In der Arithmetik bedeutet die Gleichung

$$a^{-\frac{p}{q}} = b$$

dass die Gleichung $a^p . b^q = 1$ statt hat. Ebenso verstehen wir unter dem Ausdruck 34) nur das Statthaben des Ausdruckes

$$(1+x)^p\, [\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r]^q \mp 1$$

und es frägt sich daher nur, ob dieser letztere Ausdruck richtig ist, oder was dasselbe sagt, ob der Ausdruck

$$[\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r]^q\, [\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r]^q \mp 1$$

richtig ist (Form. 33), d. h., da man bei der Multiplikation die Ordnung der Faktoren beliebig vertauschen kann, ob

$$35)\qquad [\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r \,.\, \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r]^q \mp 1$$

Schreibt man jetzt statt der Summenformeln die entwickelten Reihen $1 + {}^{\frac{p}{q}}_{1}\mathfrak{B}x + \ldots + {}^{\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r + \ldots$ und $1 + {}^{-\frac{p}{q}}_{1}\mathfrak{B}x \ldots. + {}^{-\frac{p}{q}}_{r}\mathfrak{B}x^r + \ldots$ und setzt

$$(1 + \overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x + \ldots + \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r + \ldots)\,(1 + \overset{1}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x \ldots + \overset{r}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r + \ldots)$$
$$\mathrel{\text{╪}} \overset{2}{{}^{0}V} + \overset{2}{{}^{1}V}x^1 \ldots + \overset{2}{{}^{r}V}x^r + \ldots$$

so sind die Variationen aus den zwei Elementenreihen $1, \overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} \ldots \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} \ldots$ und $1, \overset{1}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}, \ldots \overset{r}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} \ldots$ zu bilden (§. 22). Man findet daher

$$\overset{2}{{}^{r}V} = \overset{r}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}\;\overset{r-1}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}\;\overset{r-2}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} \ldots + \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist aber nach Formel 27), wenn man in derselben $a = -\frac{p}{q}$, $b = \frac{p}{q}$ setzt, soviel wie $\overset{r}{{}^{0}\mathfrak{B}}$, also Null wenn $r > 0$ und $= 1$ wenn $r = 0$ (§. 37 Anmerk.) mithin $\overset{2}{{}^{0}V} = 1$ und $\overset{2}{{}^{r}V} = 0$ sobald $r > 0$ und demnach

$$36) \qquad \Sigma\, \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r \,.\, \Sigma\, \overset{r}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r \mathrel{\text{╪}} 1$$

mithin auch

$$\left[\Sigma\, \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r \,.\, \Sigma\, \overset{r}{{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r\right]^q \mathrel{\text{╪}} 1$$

Der Ausdruck 35) ist also richtig, folglich auch der Ausdruck 34). Da wir nun auch $q = 1$ setzen können, wodurch $-\frac{p}{q}$ in die ganze negative Zahl $-p$ übergeht, so können wir mithin behaupten, dass die Binomialformel 31) auch für negative, ganze oder gebrochene, rationale Werthe von $m$ gilt. Wir sagen daher: die Reihe $\Sigma\, \overset{r}{{}^{m}\mathfrak{B}}x^r$ entspricht für jeden rationalen Werth von $m$ dem Ausdruck $(1 + x)^m$.

## Sechstes Kapitel.

# Die Convergenz der Reihen.

## 42.

Nachdem im Vorhergehenden erläutert worden ist, welchen Sinn wir den Fundamentaloperationen der Arithmetik beilegen, wenn wir dieselben auf Reihen anwenden, soll nun die im ersten Kapitel angeregte Frage (§. 5) erörtert werden, nemlich unter welchen Bedingungen diese an den Reihen ausgeführten Operationen mit den gleichnamigen der Arithmetik übereinstimmen. Hierzu ist es vor Allem nöthig die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen die Reihen, mit welchen wir rechnen, einen bestimmten Zahlenwerth haben. Diese Frage wollen wir aber nicht blos auf Reihen beschränken, welche die bis jetzt betrachtete Form haben, d. h. auf Reihen welche nach den steigenden Potenzen einer Grösse $x$ geordnet sind (§. 3), vielmehr soll in diesem Kapitel das Wort Reihe in allgemeinerem Sinne genommen werden. Wir denken uns nemlich eine Anzahl auf einander folgender, nach irgend einem Gesetze gebildeter, reeller, positiver oder negativer, Zahlengrössen, $u_1, \ldots u_n$ welche einzeln einen endlichen Werth haben, so lange $n$ einen endlichen Werth hat, und nehmen an dass dieselben, nach der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge, zusammen gezählt werden. Hierdurch entsteht ein Ausdruck

$$1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

welchen wir eine Reihe nennen, jede einzelne der addirten Grössen heisst ein Glied der Reihe.

## 43.

Bei der Reihe 1) sind nun zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, indem entweder $n$ endlich oder unendlich ist. Im ersten Falle besteht die Reihe aus einer endlichen Gliederzahl, sie ist daher, wie man sagt, eine endliche, die Summe dieser Glieder, oder der Werth der Reihe ist also eine bestimmte Zahl, es bedarf demnach keiner weiteren Untersu-

chung, ob die Reihe einen bestimmten Zahlenwerth hat, eine endliche Reihe hat immer einen Werth.

Im zweiten Falle dagegen hat die Reihe eine unendliche Gliederzahl, sie ist, wie man sagt, eine unendliche, und nun entsteht die Frage, ob und wann sie einen bestimmten Werth hat.

Unter der Voraussetzung, welche von nun an immer stillschweigend gemacht wird, dass die Reihe 1) eine unendliche ist, sind drei Fälle zu unterscheiden. Entweder nähert sich die Summe der $r$ ersten Glieder

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r$$

einem bestimmten Werthe immer mehr, je grösser $r$ ist, und unbegrenzt, so dass bei unbeschränktem Wachsen des $r$ der Unterschied zwischen diesem Werthe und jener Summe unter jede angebbare Grösse sinkt, dann convergirt die Reihe, und dieser Werth heisst alsdann die Summe oder der Werth der Reihe. Oder zweitens: die Summe der $r$ ersten Glieder nähert sich mit wachsendem $r$, je nach Verschiedenheit dieser Zahl, verschiedenen bestimmten Werthen unbegrenzt, dann oscillirt die Reihe und die verschiedenen Werthe, welchen sich die Summe der ersten Glieder nähert, können die verschiedenen Summen oder Werthe der Reihe heissen. Oder drittens: die Summe der $r$ ersten Glieder wächst, mit zunehmendem $r$, über jeden angebbaren Werth hinaus, dann divergirt die Reihe, und hat keinen Werth oder keine Summe.

Als Beispiele dieser drei Arten von Reihen können die Reihen

2) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$$

3) $$(1+1)+(\frac{1}{2}-1)+(\frac{1}{2^2}+1)+(\frac{1}{2^3}-1)+\ldots = 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots$$

4) $$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

dienen. Die erste convergirt, und ihr Werth ist 2. Man hat nemlich

$$1 = 2 - 1$$

$$\text{also } 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

Man sieht wie man diese Gleichungen fortsetzen kann, indem man immer auf beiden Seiten ein folgendes Glied der Reihe addirt, und überzeugt sich auf diese Weise, dass allgemein

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^r} = 2 - \frac{1}{2^r}$$

Lässt man nun $r$ unbeschränkt wachsen, so sinkt $\frac{1}{2^r}$ unter jede angebbare Grösse, d. h. der Unterschied zwischen der Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^r}$ und der Zahl 2 sinkt unter jede angebbare Grösse, folglich ist 2 die Summe der Reihe 2). Die Reihe 3) oscillirt, und zwar nähert man sich unbegrenzt dem Werthe 3 oder dem Werthe 2, je nachdem man eine ungerade oder eine gerade Anzahl der ersten Glieder addirt. Diese Reihe ist nemlich aus der Reihe 2) entstanden, indem man zu dem ersten, dritten, allgemein zu jedem ungeraden Gliede den Werth 1 und zu dem zweiten, vierten, allgemein zu jedem geraden Gliede den Werth — 1 addirt hat. Addirt man also eine gerade Anzahl Glieder, so heben sich + 1 und — 1 paarweise auf, und man erhält dasselbe, als wenn man dieselbe Anzahl Glieder der Reihe 2) addirt; man nähert sich also unbegrenzt dem Werth 2. Addirt man dagegen eine ungerade Anzahl Glieder, so erhält man eine Einheit mehr und nähert sich mithin unbegrenzt dem Werthe 3. Aus dem Umstande, dass die Summe der $r$ ersten Glieder einer Reihe, bei unbegrenzt wachsendem $r$, nicht über einen angebbaren Werth hinaus wächst, kann man also nur schliessen, dass die Reihe nicht divergirt, nicht aber dass sie convergirt, sie kann auch oscilliren.

Die Reihe 4) divergirt, denn ihre Glieder sind die auf einander folgenden ganzen Zahlen, die Glieder wachsen also

über jede angebbare Zahl hinaus und um so mehr die Summe der ersten Glieder.

Eine endliche Reihe kann immer als eine unendliche convergirende angesehen werden.

Den Werth einer convergirenden Reihe nennt man auch ihre Grenze und braucht dafür das Zeichen *lim* (Abkürzung des lateinischen Wortes *limes*). Man sagt z. B. $2 = lim\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^r})$. Ist mithin die Reihe 1) convergent und ihr Werth $W$, so ist

$$W = lim\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_r)$$

und zugleich

$$lim\,(u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots) = 0$$

Im Folgenden soll dieses Zeichen *lim* in noch ausgedehnterem Sinne gebraucht werden, indem wir unter der Gleichung

$$lim\, A_r = k$$

verstehen werden, dass der Ausdruck $A_r$, in welchem $r$ irgendwie vorkommt, sich mit unbegrenzt wachsendem $r$ unbegrenzt dem Werthe $k$ nähert*).

## 44.

Eine Reihe mit ausschliesslich positiven Gliedern kann convergiren oder divergiren, aber nicht oscilliren. Denn jemehr ihrer ersten Glieder man zusammenzählt, einen desto grösseren Werth erhält man. Dieser Werth kann sich nun entweder einer bestimmten Grenze immer mehr nähern, dann convergirt die Reihe, oder unbegrenzt wachsen, dann divergirt die Reihe. Er kann aber nicht abwechselnd ab und zunehmen, wie es bei einer oscillirenden Reihe der Fall ist. Eine oscillirende Reihe muss also immer positive und negative Glieder enthalten, und zwar müssen die positiven Glieder für sich genommen, und ebenso die negativen Glieder für sich genommen, eine divergirende Reihe bilden. Denn sey die Rei-

*) Mitunter wird im Folgenden unter $lim\, A_r$ auch der Werth verstanden werden, welchem sich $A_r$ unbegrenzt nähert, wenn $r$ sich unbegrenzt der Null nähert, es wird das aber jedesmal ausdrücklich bemerkt werden.

he 1) eine oscillirende und sey der Werth der unter den ersten $r$ Gliedern enthaltenen positiven Glieder $P$, der Werth der darunter enthaltenen negativen Glieder (ohne Rücksicht auf das Zeichen) $Q$, also

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r = P - Q$$

Würden nun, mit wachsendem $r$, sowohl $P$ als $Q$ sich einer bestimmten Grenze unbegrenzt nähern, so wäre dies auch bei ihrer Differenz der Fall; sey also die Grenze, welcher sich $P - Q$ nähert, $g$, so ist

$$g = lim\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_r)$$

mithin wäre die Reihe 1) convergent. Würde dagegen einer der Werthe $P$ und $Q$ sich einer bestimmten Grenze nähern, der andere über jede angebbare Zahl hinaus wachsen, so müsste auch ihre Differenz $P - Q$ (ohne Rücksicht auf das Zeichen) über jeden angebbaren Werth hinaus wachsen, also auch die Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_r$, d. h. die Reihe 1) wäre eine divergirende. Wachsen dagegen $P$ und $Q$ beide über jeden angebbaren Werth hinaus, so kann ihre Differenz, je nach Beschaffenheit der Zahl $r$, sich verschiedenen bestimmten Werthen unbegrenzt nähern.

Hieran schliesst sich die Bemerkung, dass man bei Untersuchung der Beschaffenheit einer Reihe immer voraussetzt, dass die Glieder derselben in einer festgesetzten Ordnung auf einander folgen. Eine Veränderung dieser Ordnung könnte auch die Beschaffenheit der Reihe ändern *). Ebenso darf man nicht Glieder mit verschiedenen Zeichen, auch wenn sie unmittelbar aufeinander folgen, vereinigen, wenn man sich nicht vorher überzeugt hat, dass hierdurch die Beschaffenheit der Reihe nicht geändert wird. So z. B. wurde bewiesen (§. 43) dass die Reihe $2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots$ oscillirt; würde man jedes positive Glied mit dem darauf folgenden negativen vereinigen, so erhielt man die Reihe $\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \ldots$ $= \frac{3}{2}\,(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} \ldots)$. Dieser Ausdruck ist jeden-

*) Vergleiche Note II.

falls kleiner als $\frac{3}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots)$. Da nun letztere Reihe convergirt, so muss auch die Reihe $\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \ldots$ convergiren.

Weiss man dagegen schon, dass eine Reihe convergirt, so ist es klar, dass man so viel auf einanderfolgende Glieder, als man will, zusammenziehen kann, ohne dass hierdurch die Beschaffenheit der Reihe geändert wird, da der Werth, welchem man sich unbegrenzt nähert, derselbe bleibt, ob man die Glieder einzeln zusammenzählt, oder erst einige der aufeinanderfolgenden Glieder zusammenzieht.

45.

Eine unerlässliche Bedingung, ohne deren Erfüllung keine Reihe convergiren kann, ist die, dass ihre Glieder unbeschränkt abnehmen, so dass sie zuletzt unter jeden angebbaren Werth sinken. Ist die Reihe 1) eine convergirende und ihre Summe $S$, so hat man

$$S = lim\ (u_1 + u_2 \ldots + u_r)$$
$$S = lim\ (u_1 + u_2 \ldots + u_r + u_{r+1})$$

welche Gleichungen nicht neben einander bestehen könnten, wenn $u_{r+1}$ einen angebbaren Werth hätte. Man darf aber nicht umgekehrt behaupten, dass eine Reihe, deren Glieder unter jeden angebbaren Werth sinken, auch nothwendig convergirt. Im Gegentheil ist es leicht Reihen dieser Art nachzuweisen, welche divergiren. Eine solche ist die Reihe

$$5)\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

deren allgemeines Glied (§. 19) durch $\frac{1}{r}$ dargestellt werden kann. Mit wachsendem $r$ sinken die Glieder dieser Reihe offenbar unter jede angebbare Grösse, dennoch ist sie eine divergirende. Nimmt man nemlich aus dieser Reihe, die aus $k$ Gliedern bestehende Gruppe

$$6)\qquad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+k}$$

heraus, so ist offenbar jedes dem letzten Gliede vorausgehende grösser als dieses; die Summe dieser $k$ Glieder ist also grösser als $k \cdot \frac{1}{k+k}$ d. h. grösser als $\frac{1}{2}$. Nun hat man

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

Setzt man in 6) für $k$ den Werth 2, so hat man

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

setzt man $k = 4$, so hat man

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

setzt man $k = 8$, so hat man

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$$

Auf diese Weise kann man die ganze Reihe in Gruppen theilen, deren jede grösser als $\frac{1}{2}$ ist. Da man nun, insofern die Reihe eine unendliche ist, auch unendlich viele solcher Gruppen erhält, so geben sie, zusammengenommen, etwas Grösseres als das Unendlichfache des Werthes $\frac{1}{2}$, d. h. etwas über jede angebbare Zahl hinauswachsendes, mithin ist die Reihe eine divergirende.

46.

Man bemerke nun, dass die Beschaffenheit der Reihe 1) nicht von der Beschaffenheit ihrer ersten Glieder bis zu einem bestimmten $u_k$ abhängt. Denn da, welches auch die Beschaffenheit dieser ersten Glieder sey, ihre Summe immer einen bestimmten Werth hat, so wird, wenn man diese Glieder wegnimmt, die übrig bleibende Reihe $u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots$ convergiren, oscilliren oder divergiren, je nachdem die ursprüngliche Reihe convergirt, oscillirt oder divergirt. Haben wir daher z. B. bewiesen, dass die Reihe 5) divergirt, so folgt daraus, wenn $p$ irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, dass auch die Reihe

7) $$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots$$

divergirt. Hieraus ergiebt sich weiter dass, wenn $k$ eine positive gebrochene oder irrationale Zahl bedeutet, auch die Reihe

8) $$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots$$

divergirt. Die Zahl $k$ wird nemlich zwischen den zwei ganzen Zahlen $p-1$ und $p$ liegen, man hat also $\frac{1}{k}>\frac{1}{p}$, $\frac{1}{k+1}>\frac{1}{p+1}$ u. s. w. Da nun die Reihe 7) divergirt, so muss um so mehr auch die Reihe 8) divergiren. Setzt man $k=\frac{a}{b}$, wo $a$ und $b$ wieder positive Zahlen bedeuten, so geht 8) in

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+2b}+\dots$$

über, also ist auch die Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\dots$$

eine divergirende. Auch folgt weiter, dass wenn $k$ die frühere Bedeutung behält, auch die Reihe

9) $$\frac{1}{1-k}+\frac{1}{2-k}+\frac{1}{3-k}+\dots$$

divergiren muss. Denn da $k<p$ ist, so setze man $p-k=s$. Alsdann geht die Reihe

$$\frac{1}{p+1-k}+\frac{1}{p+2-k}+\dots$$

in

$$\frac{1}{1+s}+\frac{1}{2+s}+\dots$$

über, welche Reihe die Form der Reihe 8) hat und daher divergirt, mithin muss auch die Reihe 9) divergiren. Setzt man wieder $k=\frac{a}{b}$ so folgt aus 9) dass auch die Reihe

$$\frac{1}{b-a} + \frac{1}{2b-a} + \dots$$

divergirt.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch noch der Beweis eines Satzes, welchen wir später benutzen werden. Bedeuten $a$ und $k$ bestimmte positive (rationale oder irrationale) Zahlen, so wird das Produkt

$$\text{A)}\quad \left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right)\left(1+\frac{a}{k+2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{k+s}\right)$$

wenn $s$ unbegrenzt wächst, über jede angebbare Grenze hinauswachsen. Man hat nemlich

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right) > 1+\frac{a}{k}+\frac{a}{k+1}$$

also auch

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right)\left(1+\frac{a}{k+2}\right) > \left(1+\frac{a}{k}+\frac{a}{k+1}\right)\left(1+\frac{a}{k+2}\right)$$

d. h.

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right)\left(1+\frac{a}{k+2}\right) > 1+\frac{a}{k}+\frac{a}{k+1}+\frac{a}{k+2}$$

Ebenso findet man

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right)\left(1+\frac{a}{k+2}\right)\left(1+\frac{a}{k+3}\right) > 1+\frac{a}{k}$$
$$+\frac{a}{k+1}+\frac{a}{k+2}+\frac{a}{k+3}$$

und allgemein

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{a}{k+1}\right)\dots\left(1+\frac{a}{k+s}\right) > 1+\frac{a}{k}+\frac{a}{k+1}\dots+\frac{a}{k+s}$$

also, um so mehr, $> a\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\dots+\frac{1}{k+s}\right]$

Wächst nun $s$ unbegrenzt, so geht $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\dots+\frac{1}{k+s}$ in die divergirende Reihe 8) über, und mithin wächst auch dann das Produkt A) über jede angebbare Grenze hinaus.

### 47.

Es sollen nun aus dem Bildungsgesetz der Glieder einer Reihe Kennzeichen abgeleitet werden, welche uns in den

Stand setzen, zu entscheiden, ob eine Reihe mit unbegrenzt abnehmenden Gliedern convergirt oder nicht. Es wurde schon bemerkt, dass die Beschaffenheit der Reihe nicht von der Beschaffenheit ihrer ersten Glieder bis zu einem bestimmten abhängt. Wenn daher im Folgenden gezeigt wird, dass die Glieder der Reihen gewisse Bedingungen zu erfüllen haben, um über die Beschaffenheit der Reihen zu entscheiden, so setzen wir, der Einfachheit wegen, immer voraus, dass dies schon vom ersten Gliede an geschieht, obgleich die Beschaffenheit der Reihe dieselbe bleiben müsste, wenn auch eine bestimmte Anzahl der ersten Glieder diesen Bedingungen nicht entspräche.

Es sollen zuerst die Reihen behandelt werden bei welchen sämmtliche Glieder positiv sind; solche Reihen können nur convergiren oder divergiren (§. 44). Die Regeln, vermittelst deren man entscheiden kann, welcher dieser beiden Fälle statt hat, beruhen auf folgendem Satze.

Wenn die zwei Reihen mit nur positiven Gliedern

1) $u_1 + u_2 + \ldots$

10) $v_1 + v_2 + \ldots$

so beschaffen sind, dass allgemein $v_r < u_r$, und die erste Reihe convergirt, so convergirt auch die zweite. Ist dagegen allgemein $v_r > u_r$ und die erste Reihe divergirt, so divergirt auch die zweite.

Im ersten Falle nemlich nähert sich die Summe $u_1 + u_2 \ldots + u_r$ einem bestimmten Werthe $S$, wenn $r$ unbegrenzt wächst, die Summe $v_1 + v_2 \ldots + v_r$ ist also immer zwischen Null und diesem Werthe $S$ eingeschlossen, sie kann mithin bei wachsendem $r$ nicht divergiren, sondern muss sich ebenfalls einem bestimmten Werthe unbegrenzt nähern.

Im zweiten Falle dagegen wächst $u_1 + u_2 \ldots + u_r$ mit wachsendem $r$ über jeden angebbaren Werth hinaus, daher muss um so mehr, mit wachsendem $r$, auch $v_1 + v_2 \ldots + v_r$ über jeden angebbaren Werth hinaus wachsen.

Nun giebt es eine Reihe, bei welcher sich sehr leicht beurtheilen lässt, unter welchen Umständen sie convergirt oder divergirt, es ist dies die Reihe

11) $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$

sie wird nemlich convergiren oder divergiren, je nachdem $x$

kleiner oder nicht kleiner als die Einheit ist. Ist $x \overline{>} 1$, so nehmen die Glieder der Reihe nicht unbegrenzt ab, sie muss also divergiren (§. 45). Ist $x < 1$, so nimmt $x^r$ mit wachsendem $r$ unbegrenzt ab, die Reihe kann also convergiren. Nun ist

$$\frac{x}{1-x} = x + \frac{x^2}{1-x}$$

also $$\frac{x^2}{1-x} = x \cdot \frac{x}{1-x} = x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{x^3}{1-x} = x \cdot \frac{x^2}{1-x} = x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

allgemein $$\frac{x^r}{1-x} = x^r + \frac{x^{r+1}}{1-x}$$

also $$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 \ldots + x^r + \frac{x^{r+1}}{1-x}$$

und $$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{r+1}}{1-x}$$

die Summe $x + x^2 \ldots + x^r$ hat also, wie gross auch $r$ sey, immer den Werth $\frac{x}{1-x} - \frac{x^{r+1}}{1-x}$. Nun sinkt aber, wenn $r$ unbegrenzt wächst, $x^{r+1}$ und mithin auch $\frac{x^{r+1}}{1-x}$ unter jeden angebbaren Werth, sobald $x < 1$. Man hat daher

$$lim\,(x + x^2 + x^3 + \ldots) = \frac{x}{1-x}$$

dies ist mithin, wenn $x < 1$, der Werth der Reihe 11), welche also in diesem Falle convergirt.

Nimmt man daher die Reihe 11) für die Reihe 1), indem man $u_r = x^r$ setzt, so folgt aus dem obigen Satze:

Wenn die Reihe

10) $$v_1 + v_2 + \ldots$$

so beschaffen ist, dass allgemein $v_r < x^r$, während zugleich $x < 1$, so convergirt die Reihe, ist dagegen $v_r > x^r$ und zugleich $x > 1$, so divergirt die Reihe.

## 48.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

Die Reihe 10) convergirt oder divergirt, je nachdem der

Quotient je zweier auf einander folgender Glieder *) $\frac{v_r}{v_{r-1}}$ um ein Angebbares kleiner oder grösser als die Einheit ist.

Im ersten Falle lässt sich immer eine Zahl $x$ angeben, welche grösser als jeder dieser Quotienten und zugleich kleiner als die Einheit ist. Man hat mithin

$$\frac{v_2}{v_1} < x, \frac{v_3}{v_2} < x, \frac{v_4}{v_3} < x, \ldots \frac{v_r}{v_{r-1}} < x$$

Hieraus folgt

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_3}{v_1} < x^2, \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_4}{v_1} < x^3 \ldots\ldots$$

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_4}{v_3} \cdots \frac{v_r}{v_{r-1}} = \frac{v_r}{v_1} < x^{r-1}$$

oder $v_3 < v_1 x^2$, $v_4 < v_1 x^3 \ldots\ldots v_r < v_1 x^{r-1}$
mithin $v_3 + v_4 \ldots + v_r < v_1 (x^2 + x^3 \ldots + x^{r-1})$

Nun nähert sich, wenn $r$ unbegrenzt wächst, $x^2 + x^3 \ldots + x^{r-1}$ einer bestimmten Grenze $g$ (§. 47), da $x < 1$, also hat man auch $lim\ (v_3 + v_4 \ldots) < v_1 \,.\, g$, d. h. die Reihe $v_3 + v_4 + \ldots$ convergirt und mithin auch die Reihe 10).

Im zweiten Falle lässt sich immer eine Zahl $x$ angeben, welche kleiner als jeder der Quotienten $\frac{v_r}{v_{r-1}}$ und zugleich grösser als die Einheit ist, mithin findet man in diesem Falle $v_r > v_1 x^{r-1}$. Nun wächst $x^r$ mit wachsendem $r$, über jeden angebbaren Werth, also auch $v_r$, mithin divergirt die Reihe 10).

Man kann diesen Satz auch in folgender Gestalt aussprechen. Man setze $\frac{v_r}{v_{r-1}} = \frac{1}{1+\alpha}$, bleibt $\alpha$, bei jedem noch so grossen Werthe von $r$, eine um ein Angebbares von Null verschiedene Grösse, so wird die Reihe 10) convergiren oder divergiren, je nachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist.

---

*) Im Folgenden sind überall, wo von zwei aufeinander folgenden Gliedern die Rede ist, zwei unmittelbar auf einanderfolgende zu verstehen; ihr Quotient heisst immer: das folgende Glied dividirt durch das vorhergehende.

49.

Man nehme jetzt an eine Reihe enthalte nicht blos positive Glieder, sey diese Reihe

12) $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_r + \ldots$

Man verwandle, wo es nöthig ist, das negative Zeichen in das positive und bezeichne die neue hierdurch entstehende Reihe, welche nur positive Glieder enthält, durch

10) $v_1 + v_2 + \ldots + v_r + \ldots$

so dass $t_r = v_r$ wenn $t_r$ positiv ist, und $t_r = - v_r$ wenn $t_r$ negativ ist. Es ist also

$$\frac{t_r}{t_{r-1}} = \pm \frac{v_r}{v_{r-1}}$$

Die Reihe 12) wird nun ebenfalls convergiren oder divergiren je nachdem $v_r < x^r$ und $x < 1$, oder $v_r > x^r$ und $x > 1$.

Im zweiten Falle wächst $v_r$ und mithin auch $t_r$ (abgesehen vom Zeichen) über jede angebbare Grenze hinaus, die Reihe 12) kann sich also weder einem einzigen bestimmten Werthe nähern, d. h. convergiren, noch verschiedenen bestimmten Werthen, d. h. oscilliren, sie muss vielmehr divergiren. Im ersten Falle ist die Reihe 10) eine convergirende. Giebt man nun einem Theile der Glieder dieser Reihe das negative Zeichen, so dass sie in die Reihe 12) übergeht, so muss um so mehr die aus den positiven Gliedern bestehende Reihe eine convergirende seyn und ebenso die aus den negativen Gliedern bestehende, d. h. die Reihe 12) ist die Differenz zweier convergirender Reihen und ebendeswegen selbst eine convergirende Reihe.

Mit Rücksicht auf den Schluss des vorhergehenden §. kann man also jetzt sagen: Wenn man jedes Glied einer Reihe durch das unmittelbar vorhergehende dividirt und den Quotienten, ohne Rücksicht auf das Zeichen, $= \frac{1}{1 + \alpha}$ setzt, so wird die Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem $\alpha$ beständig einen um ein Angebbares von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth hat.

50.

Wenn dagegen $\alpha$ sich unbegrenzt dem Werthe Null nä-

hert, so reichen die vorhergehenden Betrachtungen nicht mehr aus, um die Beschaffenheit der Reihe zu beurtheilen. Es kann dann seyn, dass die Reihe, wenn alle Glieder dasselbe Zeichen haben, divergirt, während sie, wenn der Zahlenwerth der einzelnen Glieder derselbe bleibt, aber nicht alle Glieder dasselbe Zeichen haben, convergirt oder oscillirt. In der That hat man bis jetzt keine vollkommen erschöpfende Kennzeichen gefunden, welche in diesem Falle jedesmal über die Beschaffenheit der Reihe Aufschluss geben. Man kennt vielmehr nur eine Anzahl Regeln, durch welche, unter gewissen Voraussetzungen, die Beschaffenheit der Reihe erkannt, und die Zahl der Ausnahmefälle (wo nemlich die Beschaffenheit der Reihe unentschieden bleibt), in immer engere Grenzen eingeschlossen wird. Ehe wir aber diese Regeln entwickeln, sollen die vorhergehenden Betrachtungen auf die früheren analytischen Untersuchungen angewandt werden. Es ist jedoch hierzu erforderlich, dass wir zuerst noch eine besondere Gattung Reihen betrachten, die man Doppelreihen nennt.

51.

Wenn $k$ und $r$ endliche Werthe bedeuten, so sey

$$\text{I)}\quad \begin{cases} A_0 = u_{0,0} + u_{0,1} \ldots + u_{0,r} \\ A_1 = u_{1,0} + u_{1,1} \ldots + u_{1,r} \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_k = u_{k,0} + u_{k,1} \ldots + u_{k,r} \end{cases}$$

ferner

$$\text{II)}\quad \begin{cases} B_0 = u_{0,0} + u_{1,0} + \ldots + u_{k,0} \\ B_1 = u_{0,1} + u_{1,1} + \ldots + u_{k,1} \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ B_r = u_{0,r} + u_{1,r} + \ldots + u_{k,r} \end{cases}$$

Addirt man alle in I) oder II) enthaltenen Glieder zusammen, so nennt man dies eine endliche Doppelreihe. Die Summe aller dieser Glieder ist die Summe der Doppelreihe; diese Summe ist offenbar ein bestimmter endlicher Werth, sobald, wie wir voraussetzen, die einzelnen Glieder bestimmte endliche Werthe sind, und wenn man diesen Werth durch $W_{k,r}$ bezeichnet, so hat man

$$W_{k,r} = A_0 + A_1 + \ldots + A_k = B_0 + B_1 + \ldots + B_r$$

Man nehme aber nun an, dass die einzelnen Reihen in I) nicht bei dem bestimmten *r*ten Gliede abbrechen, sondern ins Unendliche fortlaufen und dass ferner auch die Anzahl der Reihen unbeschränkt ist, so dass man das System

$$\text{III)} \left\{ \begin{array}{l} u_{0,0} + u_{0,1} + \ldots + u_{0,r} + u_{0,r+1} + \ldots \\ + u_{1,0} + u_{1,1} + \ldots + u_{1,r} + u_{1,r+1} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ + u_{k,0} + u_{k,1} + \ldots + u_{k,r} + u_{k,r+1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

hat, so nennt man dies eine **unendliche** Doppelreihe. Hebt man aus diesem Systeme das System I) oder das gleichgeltende System II) heraus, und sind die übrigbleibenden Glieder so beschaffen, dass die Summe einer beliebigen Anzahl derselben, **in welcher Ordnung man sie nehmen mag**, unter jeden angebbaren Werth sinkt, wenn man $k$ und $r$ unbegrenzt wachsen lässt, so nähert sich mithin $W_{k,r}$ einer bestimmten Grenze $W$. In diesem Falle ist die unendliche Doppelreihe **convergent** und ihre **Summe** $W$. Da die Reihe $A_0 + A_1 \ldots + A_k$ dieselben Glieder enthält, wie die Reihe $B_0 + B_1 \ldots + B_r$, also auch, wenn man statt des Systems III) das System I) oder das System II) nimmt, die vernachlässigten Glieder dieselben, nur in anderer Ordnung, sind, so hat man auch, bei unbeschränkt wachsendem $k$ und $r$

$$W = \lim (A_0 + A_1 + \ldots + A_k) = \lim (B_0 + B_1 \ldots + B_r)$$

Es folgt hieraus von selbst, dass wenn die Doppelreihe convergirt, auch sowohl ihre einzelnen Horizontalreihen

$$u_{0,0} + u_{0,1} + \ldots + u_{0,k} + \ldots$$

u. s. w.

als ihre einzelnen Verticalreihen

$$u_{0,0} + u_{1,0} + \ldots + u_{k,0}$$

u. s. w.

convergiren müssen.

Es frägt sich nun wie man aus der Beschaffenheit der Doppelreihe III) Kennzeichen ihrer Convergenz ableiten kann. Zunächst ist klar, dass wenn eine Doppelreihe, die nur positive Glieder enthält, convergirt, dies um so mehr der Fall seyn muss,

wenn einzelne Glieder negativ sind. Man nehme daher an, dass wenn man alle Glieder der Doppelreihe III) positiv nimmt, hierdurch $u_{0,0}$ in $v_{0,0}$, $u_{1,0}$ in $v_{1,0}$ u. s. w. übergeht. Die hierdurch entstehende Doppelreihe ist also

$$\text{IV)} \begin{cases} \quad v_{0,0} + v_{0,1} + \ldots + v_{0,r} + \ldots \\ + v_{1,0} + v_{1,1} + \ldots + v_{1,r} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots \\ + v_{k,0} + v_{k,1} + \ldots + v_{k,r} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

Man setze allgemein

$$a_s = v_{s,0} + v_{s,1} + \ldots + v_{s,r}$$
$$b_s = v_{0,s} + v_{1,s} + \ldots + v_{k,s}$$

Wenn nun nicht blos die einzelnen Horizontalreihen in IV) convergiren, so dass, bei unbegrenzt wachsendem $r$, $\lim a_0$, $\lim a_1$ u.s.w. bestimmte Werthe sind, sondern auch die Summe dieser Horizontalreihen einen bestimmten Werth hat, so dass, bei unbegrenzt wachsendem $r$ und $k$, $\lim (a_0 + a_1 + \ldots + a_k)$ einen bestimmten Werth hat, so wird die Doppelreihe IV) convergiren.

Nimmt man nemlich statt der unendlichen Doppelreihe die endliche

$$\text{V)} \begin{cases} \quad v_{0,0} + v_{0,1} + \ldots + v_{0,r} \\ + v_{1,0} + v_{1,1} + \ldots + v_{1,r} \\ \quad \ldots \\ + v_{k,0} + v_{k,1} + \ldots + v_{k,r} \end{cases}$$

so vernachlässigt man erstens die unbegrenzte Zahl Reihen

$$\text{VI)} \begin{cases} \quad v_{k+1,0} + v_{k+1,1} \ldots v_{k+1,r} + \ldots \\ + v_{k+2,0} + v_{k+2,1} \ldots v_{k+2,r} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

und zweitens die k + 1 Reihen

$$\text{VII)} \begin{cases} \quad v_{0,r+1} + v_{0,r+2} + \ldots \\ + v_{1,r+1} + v_{1,r+2} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots \\ + v_{k,r+1} + v_{k,r+2} + \ldots \end{cases}$$

Addirt man in dem System VI) die einzelnen Horizontalreihen, so giebt dies, wenn man $k$ und $r$ unbegrenzt wachsen lässt,

$lim\ (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots)$. Da nun $lim\ (a_0 + a_1 + \ldots a_k)$ einen bestimmten Werth haben soll, so ist $lim\ (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots) = 0$. Nun sind alle in $a_{k+1}$, $a_{k+2}$ . . . enthaltenen Glieder $v_{k+1,0}$ u. s. w. positiv, mithin muss diese Gleichung auch dann noch ihre Geltung behalten, wenn man die in $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ enthaltenen Glieder auf irgend eine andere Weise ordnet, d. h. das System VI) wird, in welcher Ordnung man die Glieder zusammenzählen mag, bei unbegrenzt wachsendem $k$ und $r$, immer unter jeden angebbaren Werth sinken.

Da ferner die Horizontalreihen in IV) convergiren sollen, so muss jede der in VII) enthaltenen Horizontalreihen mit wachsendem $r$ unter jede angebbare Grenze sinken, man kann also $r$ so gross nehmen, dass jede dieser $k + 1$ Reihen kleiner als $\frac{\alpha}{k+1}$ ist, wo $\alpha$ eine beliebig kleine Zahl bedeutet, und die Summe dieser Reihen wird mithin kleiner als $\alpha$, d. h. kleiner als eine beliebig kleine Zahl seyn. Dasselbe muss aber auch noch statt finden, wenn man die ausschliesslich positiven Glieder, welche das System VII) enthält, in jeder beliebigen Ordnung addirt. Mithin sinkt die Summe der in VI) und VII) enthaltenen Glieder, in welcher Ordnung man sie nehmen mag, bei unbegrenzt wachsendem $k$ und $r$, unter jede angebbare Grenze, d. h. die Doppelreihe IV) convergirt und um so mehr die Doppelreihe III).

Man hat demnach den Satz:
wenn sowohl die einzelnen in III) enthaltenen Horizontalreihen als auch ihre Summe $lim\ (A_0 + A_1 + \ldots A_k)$ convergiren, selbst wenn man alle Glieder der einzelnen Horizontalreihen positiv nimmt, so convergirt die Doppelreihe III). Nennt man ihre Summe $W$ so hat man

$$W = lim\ (A_0 + A_1 + \ldots + A_k) = lim\ (B_0 + B_1 \ldots + B_r)$$

Es versteht sich dass dieser Satz auch dann noch gilt, wenn einige der Horizontal- oder Verticalreihen endlich sind.

52.

In §. 20 wurde erklärt was man unter der Addition zweier Reihen

$$13)\quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

$$14)\quad b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r + \ldots$$

und der dieser Addition entsprechenden Summe

$$15)\quad (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_r + b_r) x^r + \ldots.$$

versteht. Gegenwärtig sagen wir, wenn die zwei Reihen 13) und 14) für gewisse Werthe des $x$ convergiren, so wird für diese Werthe die entsprechende Summe auch die wirkliche Summe, im Sinne der Arithmetik, seyn, d. h. wenn man die einzelnen Werthe der Reihen 13) und 14) berechnet und addirt, erhält man dasselbe, wie wenn man den Werth der Reihe 15) berechnet. Man kann daher das Zeichen des Entsprechens in diesem Falle mit dem Gleichheitszeichen vertauschen und schreiben

$$16)\quad \Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r = \Sigma (a_r + b_r) x^r$$

Sey nemlich $W$ der Werth der Reihe 13) und $W'$ der Werth der Reihe 14). Man setze

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r = W - R$$
$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r = W' - R'$$

also

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x \ldots + (a_r + b_r) x^r = W + W' - (R + R')$$

Nun ist $lim\,(a_0 + a_1 x \ldots + a_r x^r) = W$

$$lim\,(b_0 + b_1 x \ldots + b_r x^r) = W'$$

es sinken demnach $R$ und $R'$, mit unbeschränkt wachsendem $r$, unter jeden angebbaren Werth, folglich auch $R + R'$. Man hat mithin

$$lim\,[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x \ldots + (a_r + b_r) x^r] = W + W'$$
$$= lim\,(a_0 + a_1 x \ldots + a_r x^r) + lim\,(b_0 + b_1 x + \ldots b_r x^r)$$

d. h.

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) x + \ldots = (a_0 + a_1 x + \ldots) + (b_0 + b_1 x + \ldots)$$

Der Beweis bleibt derselbe wenn irgend eine endliche Anzahl Reihen zu addiren ist. Sobald diese nach aufsteigenden Potenzen von $x$ geordneten Reihen für gewisse Werthe des $x$ convergiren, so ist, für diese Werthe, die ihrer Addition entsprechende Summe, ihrer Summe im Sinne der Arithmetik gleich, d. h. es ist einerlei, ob man die Werthe der einzelnen Reihen zusammenzählt, oder ob man den Werth der ihrer Addition entsprechenden Reihe berechnet. Man kann also in diesem

Falle das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen.

Convergiren die Reihen 13) und 14) für gewisse Werthe des $x$, so wird, für diese Werthe, die der Subtraktion der Reihe 14) von der Reihe 13) entsprechende Differenz die wirkliche Differenz, im Sinne der Arithmetik, seyn, d. h. wenn man den Werth der Reihe 14) von dem Werthe der Reihe 13) abzieht, so erhält man dasselbe, wie wenn man den Werth der entsprechenden Differenz berechnet. Man kann daher in diesem Falle das Gleichheitszeichen statt des Zeichens des Entsprechens setzen und schreiben

$$17) \quad \Sigma\, a_r x^r - \Sigma\, b_r x^r = \Sigma\, (a_r - b_r) x^r$$

Man hat nemlich unter Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung

$$W - W' = lim [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x \ldots + (a_r - b_r) x^r]$$
$$= lim [a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r] - lim [b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r]$$

d. h. $[a_0 + a_1 x \ldots + a_r x^r + \ldots] - [b_0 + b_1 x \ldots + b_r x^r + \ldots]$
$$= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x \ldots + (a_r - b_r) x^r + \ldots$$

## 53.

Ist $A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r + \ldots$ das der Multiplikation der zwei Reihen 13) und 14) entsprechende Produkt, so ist (§. 22)

$$A_r = {}^r\overset{2}{V} = a_r b_0 + a_{r-1} b_1 \ldots + a_0 b_r$$

und man erhält also das Glied $A_r x^r$ des entsprechenden Produkts, indem man $a_r x^r$ mit $b_0$, $a_{r-1} x^{r-1}$ mit $b_1 x$ u. s. w. zuletzt $a_0$ mit $b_r x^r$ multiplicirt. Will man

$$A_0 + A_1 x \ldots + A_r x^r$$

d. h. die Summe aller Glieder des entsprechenden Produkts vom nullten bis zum $r$ten haben, so muss man daher allmälich $b_0$ mit $a_0$, mit $a_1 x$ u. s. w. bis $a_r x^r$ multipliciren, ferner $b_1 x$ mit $a_0$, mit $a_1 x$ u. s. w. bis $a_{r-1} x^{r-1}$, dann $b_2 x^2$ mit $a_0$, mit $a_1 x$ u. s. w. bis $a_{r-2} x^{r-2}$ multipliciren, und indem man so fortfährt, muss man zuletzt noch $b_r x^r$ mit $a_0$ multipliciren und dann alle einzelnen Produkte durch Addition verbinden. Das heisst mit anderen Worten: man erhält $A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r$ indem man alle Glieder der Reihe $a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r$ mit

allen Gliedern der Reihe $b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r$ soweit durch Multiplikation verbindet, dass kein Produkt entsteht, welches eine höhere Potenz von $x$ als die $r$te erhält, und die einzelnen Produkte addirt.

Wenn nun die zwei Reihen 13) und 14) für gewisse, positive oder negative, Werthe von $x$ convergiren, $W$ den Werth der ersten, $W'$ den der zweiten bezeichnet, es convergiren diese Reihen aber auch dann noch, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so convergirt auch das ihrer Multiplikation entsprechende Produkt und sein Werth ist $WW'$. Man kann also in diesem Falle das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen, und hat

$$18)\quad (a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r + \ldots)$$
$$= A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r + \ldots$$

d. h. wenn man die Werthe der Reihen 13) und 14) berechnet und diese Werthe mit einander multiplicirt, erhält man dasselbe, wie wenn man den Werth des der Multiplikation dieser Reihen entsprechenden Produkts berechnet. Führt man nemlich die Multiplikation der zwei Reihen 13) und 14) aus, indem man jedes Glied der ersten Reihe mit jedem Gliede der zweiten nach der Ordnung multiplicirt, so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
b_0(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) &= b_0a_0+b_0a_1x+b_0a_2x^2+\ldots+b_0a_rx^r+\ldots\\
+b_1x(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) &= \quad +b_1a_0x+b_1a_1x^2+\ldots+b_1a_{r-1}x^r+\ldots\\
+b_2x^2(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) &= \quad\quad +a_0b_2x^2+\ldots+b_2a_{r-2}x^r+\ldots\\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d. h. man erhält eine Doppelreihe, bei welcher alle einzelnen Horizontalreihen und auch deren Summe convergente Reihen sind, selbst wenn man alle Glieder positiv nimmt. Denn diese Horizontalreihen haben die Werthe $b_0 W$, $b_1 xW$ u. s. w. und ihre Summe ist $(b_0 + b_1 x + \ldots) W = WW'$. Bezeichnet man aber durch $w$, $w'$ das, was aus $W$, $W'$ wird, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so sind auch $w$, $w'$ bestimmte Werthe, und $ww'$ ist die Summe aller Horizontalreihen mit nur positiven Gliedern. Die Doppelreihe ist also convergent, und ihr Werth $WW'$ (§. 51). Man erhält ihren Werth aber auch, wenn man die Summe der Verticalreihen nimmt (ebend.), diese

letztere Summe ist aber nichts anderes als das der Multiplikation der Reihen 13) und 14) entsprechende Produkt, mithin

$$WW' = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots .$$

Hieraus folgt zugleich, dass, wenn zwei Reihen auch dann noch convergiren, wenn man alle Glieder positiv nimmt, ihr Produkt dieselbe Eigenschaft hat. Denn da die Doppelreihe auch noch convergirt, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so convergirt dann auch noch die Summe aller Verticalreihen, d. h. die Reihe, in welche die Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ übergeht, wenn man alle Glieder positiv nimmt.

Hat man ausser den Reihen 13) und 14) noch die Reihe

19) $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots$

so ist, wenn das der Multiplikation dieser drei Reihen entsprechende Produkt durch $\Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$ bezeichnet wird, nach §. 23

$$\Sigma\, A_r x^r \,.\, \Sigma\, c_r x^r \mp \Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$$

Ist daher die Reihe 19) so beschaffen, dass sie, wie die Reihen 13) und 14), für einen bestimmten Werth des $x$, auch dann noch convergirt, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so ist, nach dem Vorhergehenden, für diesen Werth des $x$

$$\Sigma\, A_r x^r \,.\, \Sigma\, c_r x^r = \Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$$

Mithin auch

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, \Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, c_r x^r = \Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$$

Es ist nun leicht zu sehen, wie diese Betrachtung auf jede e n d l i c h e Anzahl solcher Reihen ausgedehnt werden kann. Die allgemeine Regel lautet:

Hat man eine Anzahl Reihen, welche sämmtlich, für gewisse Werthe des $x$, convergent bleiben, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so wird das der Multiplikation dieser Reihen entsprechende Produkt ihr wirkliches Produkt, im Sinne der Arithmetik, seyn. Das Produkt der Werthe dieser Reihen und der Werth des der Multiplikation dieser Reihen entsprechenden Produktes sind einander gleich.

## 54.

Man nehme wieder die Reihen 13) und 14), in welchen positive und negative Glieder vorkommen können, und setze

$$\Sigma\, a_r x^r \,.\, \Sigma\, b_r x^r \doteqdot \Sigma\, A_r x^r$$

Sind nun die drei in diesem Ausdrucke enthaltenen Reihen convergent, wenn man für $x$ den bestimmten Werth $s$ setzt, so darf man für diesen Werth das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen, und es ist dann

$$\Sigma\, a_r s^r \,.\, \Sigma\, b_r s^r = \Sigma\, A_r s^r$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung einzusehen, betrachte man zunächst eine der drei Reihen, etwa $\Sigma\, a_r s^r$. Da diese Reihe convergiren soll, so darf der Zahlenwerth des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder $\frac{a_{r+1} s^{r+1}}{a_r s^r} = \frac{a_{r+1}}{a_r} s$ den Werth der Einheit nicht übersteigen und kann höchstens die Einheit selbst seyn (§. 49). Setzt man daher statt $x$ einen Werth $s^1$ welcher kleiner als $s$ ist, so ist $\frac{a_{r+1}}{a_r} s^1$ jedenfalls kleiner als die Einheit, also convergirt nicht nur die Reihe $\Sigma a_r {s^1}^r$, sondern auch diejenige, welche man aus ihr erhält, wenn man alle Glieder positiv nimmt. Auf dieselbe Weise findet man, dass auch die Reihen $\Sigma b_r {s^1}^r$ und $\Sigma A_r {s^1}^r$ noch dann convergent bleiben, wenn man alle Glieder positiv nimmt. Nach dem vorhergehenden §. hat man mithin

$$\Sigma\, a_r {s^1}^r \,.\, \Sigma\, b_r {s^1}^r = \Sigma\, A_r {s_1}^r$$

Man setze $\Sigma\, a_r s^r = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \ldots + a_r s^r + p$

$$\Sigma\, a_r {s^1}^r = a_0 + a_1 s^1 + a_2 {s^1}^2 \ldots + a_r {s^1}^r + p_1$$

also $a_1(s - s^1) + a_2(s^2 - {s^1}^2) \,.\,. + a_r(s^r - {s^1}^r) = \Sigma\, a_r s^r - \Sigma a_r {s^1}^r - p + p_1$

Da nun $p$ und $p^1$ mit wachsendem $r$ unbegrenzt abnehmen, so hat man auch

$$\lim\,[a_1(s - s^1) + a_2(s^2 - {s^1}^2) \ldots + a_r(s^r - {s^1}^r)] = \Sigma a_r s^r - \Sigma a_r {s^1}^r$$

Man setze $s - s^1 = d_1$, $s^2 - {s^1}^2 = d_2 \ldots s^r - {s^1}^r = d_r$ also

$$\Sigma\, a_r s^r - \Sigma\, a_r {s^1}^r = \lim\,[a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots . + a_r d_r]$$

oder wenn man $s^1 = ks$ setzt (wo $k$ mithin unter der Einheit

liegt) und demnach $d_1 = (1 - k)s$, $d_2 = (1 - k^2)\, s^2 \ldots$ $d_r = (1 - k^r)\, s^r$ ist, so ist

$a_1 d_1 + a_2 d_2 \ldots + a_r d_r = a_1 (1-k)\, s + a_2 (1-k^2) s^2 + \ldots a_r (1-k^r) s^r$

Man bezeichne durch $W = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_r s^r$ die Reihe, in welche die Reihe $a_1 s + a_2 s^2 \ldots + a_r s^r$ übergeht, wenn man alle Glieder positiv nimmt. Nun kann man $1-k^r$, indem man $k$ der Einheit beliebig nähert, so klein machen, als man will. Wie gross daher $W$ sey, immer kann man $(1-k^r) W$ so klein machen als man will, sobald man $1-k^r$ klein genug nimmt, etwa so dass $1-k^r$ unter $\frac{1}{W^2}$ liegt, indem dann $(1-k^r)\, W < \frac{1}{W}$ ist. Um so mehr muss daher, unter derselben Voraussetzung, $(1-k)\, \alpha_1 s + (1-k^2) \alpha_2 s^2 \ldots + (1-k^r)\, \alpha_r s^r$ unter jeder angebbaren Grenze liegen, da $1-k^r$ grösser als jeder der Werthe $1-k$, $1-k^2$, $\ldots\ldots 1-k^{r-1}$ ist. Hieraus folgt, dass um so mehr, bei derselben Voraussetzung, der Zahlenwerth von $(1-k) a_1 s + (1-k^2)\, a_2 s^2 + \ldots + (1-k^r)\, a_r s^r$ unter jeder angebbaren Grenze liegen muss. Nähert sich also $k$ der Einheit unbegrenzt, oder, mit anderen Worten, nähert sich $s^1$ dem $s$ unbegrenzt, so ist $lim\, [a_1 d_1 + a_2 d_2 \ldots + a_r d_r] = 0$ mithin ist dann $\Sigma a_r s^r - \Sigma a_r s^{1^r} = 0$ d. h. $\Sigma\, a_r s^r = \Sigma a_r s^{1^r}$. Ebenso findet man $\Sigma\, b_r s^r = \Sigma\, b_r s^{1^r}$ und $\Sigma\, A_r s^r = \Sigma A_r s^{1^r}$. Da nun

$$\Sigma\, a_r s^{1^r} \,.\, \Sigma\, b_r s^{1^r} = \Sigma\, A_r s^{1^r}$$

so folgt auch

$$\Sigma\, a_r s^r \,.\, \Sigma\, b_r s^r = \Sigma\, A_r s^r$$

## 55.

Dividirt man die Reihe 13) durch die Reihe 14) und bleibt die Reihe 14) so wie der Quotient, welcher dieser Division entspricht, für gewisse Werthe des $x$ eine convergirende Reihe wenn man alle Glieder positiv nimmt, so wird, für diese Werthe des $x$, der entsprechende Quotient der wirkliche Quotient im arithmetischen Sinne seyn. Dividirt man nemlich in die-

sem Falle den berechneten Werth der Reihe 13), welche, wie sogleich sich ergeben wird, ebenfalls convergirt, durch den berechneten Werth der Reihe 14) so erhält man dasselbe, wie wenn man den Werth des entsprechenden Quotienten berechnet.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung des §. 24 hat man nemlich.

$$\Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, A_r x^r \doteqdot \Sigma a_r x^r$$

also, unter den angegebenen Bedingungen, nach §. 53,

$$\Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, A_r x^r = \Sigma\, a_r x^r$$

die Reihe 13) muss also ebenfalls convergiren und man hat

$$\frac{\Sigma\, a_r x^r}{\Sigma\, b_r x^r} = \Sigma\, A_r x^r$$

Setzt man z. B. $\frac{1}{1-x} = \Sigma\, A_r x^r$

so ist $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ u.s.w. $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ u. s. w. Aus Kap. 4 Form. 6 ergiebt sich demnach

$A_0 = 1$, und $A_r = A_{r-1}$, also allgemein $A_r = 1$

und mithin

$$\frac{1}{1-x} \doteqdot 1 + x + x^2 + \ldots$$

Nun ist $1 - x$ für jeden endlichen Werth von $x$ convergent, insofern es eine endliche Reihe ist (§. 43), dagegen $1 + x + x^2 + \ldots$ nur dann convergent, wenn der Zahlenwerth von $x$ kleiner als die Einheit ist (§. 47). Also nur für solche Zahlenwerthe des $x$ darf das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden und dann hat man

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Aus §. 54 ergiebt sich auch noch folgender Satz. Dividirt man die Reihe 13) durch die Reihe 14) und sind sowohl diese Reihen als der ihnen entsprechende Quotient, für einen gewissen Werth $s$, den man statt $x$ setzt, convergent, so hat man

$$\frac{\Sigma\, a_r s^r}{\Sigma\, b_r s^r} = \Sigma\, A_r s^r$$

Auch hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

für den Fall dass der Zahlenwerth von $x$ kleiner als die Einheit ist.

56.

Erhebt man die Reihe 13) auf die $m$te Potenz, wo $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet, so heisst dies, die Reihe 13) wird $m$ mal mit sich multiplicirt. Bleibt daher, für gewisse Werthe des $x$, diese Reihe eine convergente, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so kann man, für diese Werthe, in der Entwickelung des polynomischen Lehrsatzes, das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen, so dass die Formel 2) des Kap. 5 in

$$(\Sigma\, a_r x^r)^m = \Sigma\, A_r x^r$$

übergeht.

Da das Binom $1 + x$ für alle endlichen Werthe des $x$ einen bestimmten Werth hat, und mithin eine convergente Reihe ist, so hat man auch, sobald $m$ eine ganze positive Zahl ist, für alle diese Werthe (Kap. 5 Form. 31)

$$(1 + x)^m = \Sigma\, {}_m\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

Setzt man in dieser Formel $x = 1$, so erhält man

$$2^m = {}_m\overset{0}{\mathfrak{B}} + {}_m\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}_m\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}_m\overset{m}{\mathfrak{B}}$$

d. h. wenn $m$ eine ganze positive Zahl ist, so hat die Summe der sämmtlichen Binomialcoefficienten der $m$ten Potenz den Werth $2^m$.

Nun haben wir bemerkt (Kap. 5 Form. 11) dass

$${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}} = \overset{r}{NC}\,(1, 2, \ldots m)$$

mithin, da ${}_m\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1$ (§. 34)

$$\overset{1}{NC}\,(1, 2, \ldots m) + \overset{2}{NC}(1, 2, \ldots m) \ldots + \overset{m}{NC}(1, 2, \ldots m) = 2^m - 1$$

d. h. die Summe der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus $m$ Elementen zu allen Classen, von der ersten bis zur $m$ten, ist $2^m - 1$.

Setzt man $x = -1$, so hat man

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \overset{1}{{}_m\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}_m\mathfrak{B}} - \overset{3}{{}_m\mathfrak{B}} \ldots \pm \overset{m}{{}_m\mathfrak{B}}$$

wo im letzten Gliede das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $m$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Hieraus folgt wieder

$$1 - \overset{1}{NC}(1,2\ldots m) + \overset{2}{NC}(1,2,\ldots m) - \overset{3}{NC}(1,2,\ldots m) \ldots \pm \overset{m}{NC}(1,2\ldots m) = 0$$

oder

$$\overset{1}{NC}(1,2,\ldots m) + \overset{3}{NC}(1,2,\ldots m) + \ldots = 1 + \overset{2}{NC}(1,2,\ldots m) + \overset{4}{NC}(1,2,\ldots m) + \ldots$$

d. h. die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus $m$ Elementen, welche in den ungeraden Classen enthalten sind, ist immer um eine Einheit grösser, als die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus $m$ Elementen, welche in den geraden Classen enthalten sind.

Ist $m = \frac{p}{q}$ und sind $p$ und $q$ ganze positive Zahlen, so hat man (Kap. 5 Form. 33)

$$[\Sigma \overset{r}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} x^r]^q \doteqdot (1 + x)^p$$

Sobald also die Reihe $\Sigma \overset{r}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} x^r$, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, convergirt, kann man das Gleichheitszeichen statt des Zeichens des Entsprechens setzen. Im Vergleich zu §. 49 setze man hier

$$t_r = \overset{r}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} x^r \quad t_{r-1} = \overset{r-1}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} x^{r-1}$$

also

$$\frac{t_r}{t_{r-1}} = \frac{\overset{r}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}}{\overset{r-1}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}}\, x = \frac{\frac{p}{q} - (r-1)}{r}\, x$$

Die Reihe $\Sigma \overset{r}{{}_{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} x^r$ wird folglich convergiren oder divergiren, je nachdem, ohne Rücksicht auf das Zeichen, von irgend ei-

nem bestimmten Werthe des $x$ an, der Ausdruck $\frac{\frac{p}{q}-(r-1)}{r}x$ kleiner oder grösser als die Einheit ist. Nun nähert sich $\frac{\frac{p}{q}-(r-1)}{r}=\frac{\frac{p}{q}+1}{r}-1$, mit wachsendem $r$, unbegrenzt der Einheit (abgesehen vom Zeichen), es kommt daher nur darauf an, ob $x$ kleiner oder grösser als die Einheit ist. Ist also $x<1$, so ist

$$[\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{\ r}\mathfrak{B}x^r]^q = (1+x)^p$$

d. h.

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{\ r}\mathfrak{B}x^r$$

Ist dagegen $x>1$, so ist diese Gleichung unstatthaft und es muss das Zeichen des Entsprechens beibehalten werden (Kap. 5 Form. 32).

Setzt man $-p$ statt $p$, so wird die Reihe $\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{\ \ r}\mathfrak{B}x^r$, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, eine convergente bleiben, sobald $x<1$. Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist jetzt $\left(\frac{-\frac{p}{q}+1}{r}-1\right)x$, welcher Ausdruck sich, mit wachsendem $r$, abgesehen vom Zeichen, unbegrenzt dem Werthe $x$ nähert.

Nun wurde gefunden (Kap. 5 Form. 36)

$$\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{\ r}\mathfrak{B}x^r \,.\, \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{\ \ r}\mathfrak{B}x^r \doteqdot 1$$

Da nun, sobald $x<1$, sowohl $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{\ r}\mathfrak{B}x^r$ als $\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{\ \ r}\mathfrak{B}x^r$ convergiren, auch wenn alle Glieder positiv sind, so folgt hieraus, nach §. 53 Form. 18), wenn $x<1$,

$$\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}_{\ r}\mathfrak{B}x^r \,.\, \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}_{\ \ r}\mathfrak{B}x^r = 1$$

oder, wenn man statt $\Sigma \overset{r}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$ seinen Werth $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ setzt,

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r = 1$$

also

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = \Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$$

Ist dagegen $x > 1$ so findet diese Gleichung nicht statt.

Es ist mithin jetzt nachgewiesen, dass die Gleichung

$$(1+x)^m = \Sigma \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} x^r$$

für alle rationalen Werthe des Exponenten gültig ist, sobald $x < 1$, dagegen unstatthaft ist, sobald $x > 1$.

57.

Ist $m$ eine irrationale Zahl, so kann man immer eine rationale Zahl $n$ finden, welche der Zahl $m$ so nahe kommt, dass der Unterschied unter jeden angebbaren Werth sinkt. Dann bedeutet $(1+x)^m$ die Grenze, welcher man immer näher kommt, je näher $n$ dem $m$ ist, so dass der Unterschied zwischen $(1+x)^m$ und $(1+x)^n$ unter jeden angebbaren Werth sinkt.

Nun ist der Sinn von $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ auch für den Fall, wenn $m$ eine irrationale Zahl ist, erklärt worden (§. 40), und es folgt zugleich daraus, dass auch dann noch $\Sigma \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} x^r$ eine convergirende Reihe ist, sobald $x < 1$, da noch immer der Quotient zweier auf einander folgender Glieder $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} x^r$ und $\overset{r+1}{{}_m\mathfrak{B}} x^{r+1}$ den Werth $\frac{m-r}{r+1}x$, d. h. einen Zahlenwerth hat, welcher sich, bei unbegrenzt wachsendem $r$, unbegrenzt dem $x$ nähert.

Dass nun $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ und $\overset{r}{{}_n\mathfrak{B}}$ einander unbegrenzt nahe kommen, sobald sich $n$ dem $m$ unbegrenzt nähert, ist leicht einzusehen. Setzt man nemlich $m = n + \alpha$, so bedeutet $\alpha$ eine Grösse, die man unbegrenzt abnehmen lässt. Nun ist

$$\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r} = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha-r+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;r}$$

aber $n+\alpha = n\;(1+\frac{\alpha}{n})$, $n+\alpha-1 = (n-1)\;(1+\frac{\alpha}{n-1})$ u. s. w. mithin

$$\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\;(1+\frac{\alpha}{n})\;(1+\frac{\alpha}{n-1})\ldots\ldots(1+\frac{\alpha}{n-r+1})$$

$$= (1+\frac{\alpha}{n})\;(1+\frac{\alpha}{n-1})\;\ldots\ldots(1+\frac{\alpha}{n-r+1})\,\overset{r}{{}_n\mathfrak{B}}$$

Nun kann man aber $\alpha$, bei jedem gegebenen Werthe von $r$, so klein machen als man will, es wird daher nicht blos jeder einzelne Faktor $1+\frac{\alpha}{n}$, $1+\frac{\alpha}{n-1}\ldots 1+\frac{\alpha}{n-r+1}$, sondern auch ihr Produkt, der Einheit so nahe gebracht werden können als man will, so dass man, bei unbegrenzt abnehmendem $\alpha$,

$$\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \lim \overset{r}{{}_n\mathfrak{B}}$$

hat.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn $\Sigma\,\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ und $\Sigma\,\overset{r}{{}_n\mathfrak{B}}$ convergirende Reihen sind, man auch, bei unbegrenzt abnehmendem $\alpha$,

$$\Sigma\,\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} = \lim\,\Sigma\,\overset{r}{{}_n\mathfrak{B}}$$

hat. Wenn nemlich die zwei Reihen

$$\Sigma a_r = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_r + \ldots$$
$$\Sigma b_r = b_0 + b_1 + b_2 \ldots + b_r + \ldots$$

convergiren und es nähert sich $b_0$ dem $a_0$, $b_1$ dem $a_1$ . . ., allgemein $b_r$ dem $a_r$ unbegrenzt, so müssen sich auch die Werthe der zwei Reihen unbegrenzt nähern. Denn sey $W$ der Werth der ersten, $W'$ der Werth der zweiten Reihe. Man setze $b_0 = a_0 + \alpha_0$, $b_1 = a_1 + \alpha_1$ u. s. w. Mithin werden $\alpha_0$, $\alpha_1$ u. s. w. unbegrenzt abnehmen. Die Reihe $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots$, welche ebenfalls convergiren muss, habe den Werth $w$. Man setze daher

$$a_0 + a_1 \ldots + a_r = W - p$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \ldots + \alpha_r = w - q$$

mithin $W + w - (p + q) = b_0 + b_1 \ldots + b_r$

und $\lim (b_0 + b_1 \ldots + b_r) = W + w$

da $p$ und $q$ bei unbegrenzt wachsendem $r$ unbegrenzt abnehmen. Man kann aber die $r + 1$ Grössen $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_r$ so klein machen, dass jede derselben kleiner als $\frac{1}{(r+1)^2}$ ist, dann ist $\alpha_0 + \alpha_1 \ldots + \alpha_r < \frac{1}{r+1}$ und demnach

$$\lim (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r) = w = 0$$

woraus

$$\lim (b_0 + b_1 \ldots + b_r) = W = \lim (a_0 + a_1 + \ldots + a_r)$$

folgt. Setzt man nun $a_r = {}^{r}_{m}\mathfrak{B}$ und $b_r = {}^{r}_{n}\mathfrak{B}$, so hat man demnach auch $\Sigma\, {}^{r}_{m}\mathfrak{B} = \lim \Sigma\, {}^{r}_{n}\mathfrak{B}$ sobald die beiden Reihen convergiren.

Aus denselben Gründen folgt, dass auch die beiden convergirenden Reihen

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots$$
$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_{r-1} x^{r-1} + \ldots$$

denselben Werth haben müssen, wenn $b_0$ dem $a_0$, $b_1$ dem $a_1$ u. s. w. unbegrenzt nahe kommen. Denn, mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung, folgt dass auch die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \ldots$$

convergiren muss; man setze daher

$$\lim (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1}) = w$$

Nun kann man, da $x$ einen bestimmten endlichen Werth hat, die Glieder $\alpha_0, \alpha_1 x \ldots \alpha_{r-1} x^{r-1}$ so klein machen, dass jedes $< \frac{1}{r^2}$ ist, indem man nur allgemein $\alpha_r < \frac{1}{r^2 x^r}$ setzt, woraus wieder

$$\lim (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1}) = 0$$

folgt. Ist also $x < 1$ so müssen sich die beiden Reihen

$\overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$ und $\overset{r}{\Sigma}\, {}_n\mathfrak{B}_x{}^r$ unbegrenzt nähern, sobald sich $n$ dem $m$ unbegrenzt nähert. Man setze nun, wenn $x < 1$,

$$D = (1 + x)^m - \overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$$

ferner ist $$0 = (1 + x)^n - \overset{r}{\Sigma}\, {}_n\mathfrak{B}_x{}^r$$

also $$D = (1 + x)^m - (1 + x)^n + \overset{r}{\Sigma}\, {}_n\mathfrak{B}_x{}^r - \overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$$

Demnach kann $D$ keine angebbare Grösse seyn, da, wenn $n$ dem $m$ unbegrenzt nahe kommt, die Differenzen $(1 + x)^m - (1 + x)^n$ und $\overset{r}{\Sigma}\, {}_n\mathfrak{B}_x{}^r - \overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$ unter jeden angebbaren Werth sinken, d. h. es ist $D = 0$ und

20) $$(1 + x)^m = \overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$$

Es ist demnach bewiesen, dass diese Formel für alle reellen Werthe von $m$ gilt, sobald der Zahlenwerth von $x$ kleiner als 1 ist, dagegen unbrauchbar wird, wenn (ohne Rücksicht auf das Zeichen) $x > 1$ ist, ausgenommen wenn $m$ eine ganze positive Zahl ist, in welchem Falle die Formel ihre Geltung für jeden Werth von $x$ behält. Es ist also noch der Fall zu untersuchen, wenn $x = \pm 1$. Dann nähert sich aber der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder in der Reihe $\overset{r}{\Sigma}\, {}_m\mathfrak{B}_x{}^r$ unbegrenzt der Einheit (abgesehen vom Zeichen). Die Reihe gehört demnach zu der Gattung, von welcher in §. 50 die Rede war, und deren Beschaffenheit jetzt genauer untersucht werden soll.

## 58.

Sey eine Reihe

21) $$t_1 + t_2 + \ldots + t_r + \ldots.$$

so beschaffen, dass, wenn man, abgesehen vom Zeichen, $\frac{t_r}{t_{r-1}} = \frac{1}{1 + \alpha}$ setzt, mit wachsendem $r$, der Werth von $\alpha$ unter jede angebbare Grenze sinkt. Es sind alsdann zunächst zwei Fälle zu unterscheiden je nachdem $\alpha$, obgleich es sich unbegrenzt der Null nähert, immer negativ oder immer po-

sitiv bleibt. Im ersten Falle werden die Glieder der Reihe 21) immer wachsen, wenn sie sich auch einer bestimmten Grenze nähern, denn man hat allgemein $\frac{t_r}{t_{r-1}} = \frac{1}{1+\alpha}$, also, da $\alpha$ negativ ist, $t_r > t_{r-1}$. Die Reihe kann also niemals convergiren, weil bei einer solchen die Glieder abnehmen müssen (§. 45). Hat sie nur positive Glieder, so muss sie mithin divergiren. Eine solche Reihe ist z. B.

$$(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\ldots\ldots$$

Hier ist $t_r = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^r}$, die Glieder nähern sich also dem Werthe 2 (§. 43), indem sie fortwährend wachsen. Auch ist $\frac{t_r}{t_{r-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2^{r-1}}+\frac{1}{2^r}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2^{r-1}}}$

$$= \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2^r}}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^r}} \text{ also } \alpha = -\frac{\frac{1}{2^r}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^r}}$$

d. h. ein negativer Ausdruck, welcher sich mit wachsendem $r$ unbegrenzt der Null nähert.

Hat die Reihe auch negative Glieder, so kann sie divergiren oder oscilliren. Eine divergirende Reihe dieser Art erhielte man aus der vorhergehenden, wenn man immer zwei Glieder mit dem positiven und das folgende mit dem negativen Zeichen nähme. Die Summe dreier solcher Glieder wäre nemlich

$$(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{3k+1}})+(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{3k+2}})-(1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{2^{3k+3}})$$
$$= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{3k+1}}-\frac{1}{2^{3k+3}}$$

also grösser als die Einheit, und da man unbegrenzt viele solcher dreigliedrigen Gruppen hat, so divergirt die Reihe. Eine oscillirende Reihe erhielte man dagegen, wenn man in der

obigen Reihe die Glieder abwechselnd mit positivem und negativem Zeichen nähme. Man hätte dann nemlich

$$1+\frac{1}{2}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$$
$$-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})+\ldots$$

Nimmt man nun die Summe zweier auf einander folgender Glieder $1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{2^{2r-1}}-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{2r}})=-\frac{1}{2^{2r}}$ so ergiebt sich daraus, dass die Summe der $2r$ ersten Glieder $=-(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}\ldots+\frac{1}{2^{2r}})$ ist. Lässt man $r$ unbeschränkt wachsen, so erhält man eine Reihe, welche nur einen Theil der Glieder der Reihe 2) enthält, und daher um so mehr convergiren muss, da letztere convergirt. Die Grenze der $2r$ ersten Glieder ist also ein bestimmter negativer Werth. Nimmt man dagegen zur Summe der $2r$ ersten Glieder noch das $2r+1$te Glied, welches $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\ldots+\frac{1}{2^{2r+1}}$ ist, hinzu, so wird die Summe der $2r+1$ ersten Glieder $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\ldots+\frac{1}{2^{2r+1}}$ eine Reihe, welche aus denselben Gründen, wenn $r$ unbeschränkt wächst, einen bestimmten positiven Werth hat.

59.

Da es uns aber besonders interessirt die Fälle kennen zu lernen, in welchen eine Reihe convergirt, so wollen wir nun annehmen $\alpha$ sey positiv, so dass die Glieder der Reihe abnehmen*). Hier ist nun in einem bestimmten Falle die Entscheidung sehr leicht. Wenn nemlich die Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, und zugleich der Zahlenwerth der Glieder beständig und unbegrenzt abnimmt, so

*) Wenn die Glieder theils zunehmen theils abnehmen, lassen sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, keine allgemeinen Regeln geben.

dass er zuletzt um keine angebbare Grösse von Null verschieden ist, so wird die Reihe convergiren.

Sey diese Reihe

22) $t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \ldots + t_{2r-1} - t_{2r} + \ldots$

und $t_1$, $t_2$ u.s.w. positive Grössen. Man setze

$$W_{2r} = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots t_{2r-1} - t_{2r}$$
$$W_{2r+1} = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \ldots + t_{2r-1} - t_{2r} + t_{2r+1}$$
$$W_{2r+2} = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \ldots + t_{2r-1} - t_{2r} + t_{2r+1} - t_{2r+2}$$

so ist $W_{2r+1} - W_{2r} = t_{2r+1}$, $W_{2r+1} - W_{2r+2} = t_{2r+2}$. Da nun mit wachsendem $r$, unserer Annahme gemäss, sowohl $t_{2r+1}$ als $t_{2r+2}$ sich unbegrenzt der Null nähern, so ist dies auch bei den Differenzen $W_{2r+1} - W_{2r}$ und $W_{2r+1} - W_{2r+2}$ der Fall, d. h. $W_{2r}$, $W_{2r+1}$, $W_{2r+2}$ oder, in Worten, die Summe jeder geraden wie jeder ungeraden Anzahl der ersten Glieder, nähern sich, mit wachsendem $r$, unbegrenzt. Ferner sind die Differenzen $t_1 - t_2$, $t_3 - t_4$ u.s.w. sowie die Differenzen $t_2 - t_3$, $t_4 - t_5$ u.s.w. positive Grössen. Nun ist

$$W_{2r} = (t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) \ldots + (t_{2r-1} - t_{2r})$$
$$= t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) \ldots - (t_{2r-2} - t_{2r-1}) - t_{2r}$$

also

$$W_{2r} > t_1 - t_2$$
$$< t_1$$

Ebenso hat man

$$W_{2r+1} = (t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) \ldots + (t_{2r-1} - t_{2r}) + t_{2r+1}$$
$$= t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) \ldots - (t_{2r} - t_{2r+1})$$

also

$$W_{2r+1} > t_1 - t_2$$
$$< t_1$$

mithin sind $W_{2r}$ und $W_{2r+1}$ beide zwischen den positiven endlichen Werthen $t_1 - t_2$ und $t_1$, eingeschlossen, und da sie sich, mit wachsendem $r$, unbegrenzt einander nähern, so müssen sie sich auch unbegrenzt einem und demselben positiven endlichen Werthe nähern, d. h. die Reihe 22) convergirt und hat einen endlichen positiven Werth.

Ein Beispiel dieser Art bietet die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} + \ldots$$

Hier ist, abgesehen vom Zeichen, $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{r}{r+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{r}}$, also $\alpha = \frac{1}{r}$, mithin $\alpha$ immer positiv und unbegrenzt abnehmend. Zugleich nehmen auch die Glieder der Reihe unbegrenzt und beständig ab und sind abwechselnd positiv und negativ, folglich convergirt die Reihe, während sie divergirte, wenn alle Glieder dasselbe Zeichen hätten (§. 45).

Ein anderes Beispiel bietet die Reihe

$$23) \qquad {}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{m}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{m}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots\ldots$$

wo $m$ eine positive gebrochene oder irrationale Zahl bedeutet. Setzt man ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = t_r$ so ist

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{m-r}{r+1} = -\frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)}{1+\frac{1}{r}} \quad \text{(Kap. 5 Form. 16)}$$

dieser Ausdruck nähert sich aber offenbar, mit wachsendem $r$, unbegrenzt der Einheit. Nimmt man $r$ grösser als $m$, so ist $1 - \frac{m}{r}$ positiv und zugleich kleiner als $1 + \frac{1}{r}$. Von diesem Werthe von $r$ an, werden also die Glieder abwechselnd positiv und negativ seyn, da der Quotient zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder $\frac{-\left(1-\frac{m}{r}\right)}{1+\frac{1}{r}}$, also negativ ist.

Zugleich werden, von da an, die Glieder unbegrenzt abnehmen. Um nemlich aus ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ die folgenden Glieder abzuleiten, muss man (ohne Rücksicht auf das Zeichen) diesen Ausdruck allmälich

mit $\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}, \frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{m}{r+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r+1}\right)}, \frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{m}{r+1}\right)\left(1-\frac{m}{r+2}\right)}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r+1}\right)\left(1+\frac{1}{r+2}\right)}$

u. s. w. multipliciren, oder, was dasselbe sagt, mit $\frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m}}$,

$$\frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m+1}}, \frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1+m}{r-m+2}}$$

u. s. w. Der Zähler dieser Produkte ist immer die Einheit, der Nenner dagegen wächst mit der Anzahl der Faktoren über jede angebbare Grenze. Denn setzt man $1+m=a$, $r-m=k$, so geht das Produkt $(1+\frac{1+m}{r-m})(1+\frac{1+m}{r-m+1}) \ldots (1+\frac{1+m}{r-m+s})$ in das Produkt A) über, von welchem wir (§. 46) bewiesen haben, dass es mit unbegrenzt wachsendem $s$, über jede angebbare Grenze wächst. Also müssen die Glieder der Reihe 23) unbegrenzt abnehmen und mithin convergirt die Reihe.

## 60.

Wenn dagegen die Glieder der Reihe 22) zwar beständig aber nicht unbegrenzt abnehmen, sondern sich, abgesehen vom Zeichen, einer bestimmten Grenze $k$ unbegrenzt nähern, so wird die Reihe oscilliren und zwei verschiedene positive Werthe haben, je nachdem man die Grenze der Summe einer geraden oder ungeraden Zahl der Anfangsglieder sucht. Man beweist nemlich in diesem Falle ebenso wie im vorhergehenden, dass sowohl $W_{2r}$ als $W_{2r+1}$ zwischen zwei positiven endlichen Grenzen eingeschlossen ist, die Reihe kann also nicht divergiren. Da nun $W_{2r+2} - W_{2r} = t_{2r+1} - t_{2r+2}$, $W_{2r+4} - W_{2r+2} = t_{2r+3} - t_{2r+4}$ u.s.w. und $t_{2r+1} - t_{2r+2}$, $t_{2r+3} - t_{2r+4}$ mit wachsendem $r$ zuletzt unter jeden angebbaren Werth sinkt, so müssen sich $W_{2r}$, $W_{2r+2}$, $W_{2r+4}$ ... derselben Grenze nähern, sie heisse $g$. Ebenso findet man dass auch $W_{2r+1}$, $W_{2r+3}$, $W_{2r+5}$ ... sich einer und derselben Gränze nähern. Nun ist aber $W_{2r+1} = W_{2r} + t_{2r+1}$ folglich muss sich $W_{2r+1}$, mit unbegrenzt wachsendem $r$,

auch unbegrenzt dem Werthe $g+k$ nähern. Eine Reihe dieser Art ist die in §. 43 betrachtete Reihe 3) bei welcher die Zahlenwerthe der Glieder sich der Einheit nähern.

Wenn man $-m$ statt $m$ in der Reihe 23) setzt, so geht diese in

$$24) \qquad {}^{-m}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{-m}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{-m}\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots$$

über. Setzt man wieder ${}^{-m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = t_r$, so findet man $\frac{t_{r+1}}{t_r} = - \frac{(1+\frac{m}{r})}{1+\frac{1}{r}}$, die Glieder der Reihe sind also, von Anfang an, mit abwechselnden Zeichen versehen. Ist nun $m > 1$ so ist $\frac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ grösser als die Einheit; die Reihe kann also nur divergiren oder oscilliren (§. 58), sie wird aber divergiren. Denn, da $\frac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}} = 1 + \frac{m-1}{r+1}$ so muss man, um die folgenden Glieder zu finden, (ohne Rücksicht auf das Zeichen) ${}^{-m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ allmälich mit $1+\frac{m-1}{r+1}$, $(1+\frac{m-1}{r+1})(1+\frac{m-1}{r+2})$ u.s.w. multipliciren. Das Produkt $(1+\frac{m-1}{r+1})(1+\frac{m-1}{r+2})\ldots(1+\frac{m-1}{r+s+1})$ geht aber, wenn man $m-1$ (welches positiv ist) $= a$ und $r+1 = k$ setzt, in das Produkt $A$ des §. 46 über, und wächst also, mit unbegrenzt wachsendem $s$, über jede angebbare Grenze, folglich wachsen auch die Glieder der Reihe über jede angebbare Grenze.

Ist $m = 1$, so ist $\frac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}} = 1$, die Glieder der Reihe

behalten also denselben Zahlenwerth. Nun ist ${}^{-m}\overset{1}{\mathfrak{B}} = -m$, also ${}^{-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} = -1$, die Reihe geht mithin in

$$-1+1-1+1-1+1-\ldots.$$

über, d. h. sie oscillirt und hat die zwei Werthe 0 und $-1$.

Ist $m < 1$ so setze man $\dfrac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}} = \dfrac{1}{1+\frac{1-m}{r+m}}$. Nun muss man um die folgenden Glieder (ohne Rücksicht auf das Zeichen) zu erhalten, ${}^{-m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ mit $\dfrac{1}{1+\frac{1-m}{r+m}}$, $\left(\dfrac{1}{1+\frac{1-m}{r+m}}\right)\left(\dfrac{1}{1+\frac{1-m}{r+m+1}}\right)$ u. s. w. multipliciren. Setzt man aber das positive $1-m=a$ und $r+m=k$ so sieht man dass das Produkt $\left(1+\frac{1-m}{r+m}\right)$ $\left(1+\frac{1-m}{r+m+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1-m}{r+m+s}\right)$ wieder mit $s$ über jede angebbare Grenze wächst, die Glieder der Reihe nehmen daher unbegrenzt ab, folglich convergirt die Reihe.

## 61.

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass die Glieder der Reihe 21) sämmtlich positiv sind und beständig abnehmen. Kann man Bedingungen nachweisen unter welchen eine solche Reihe convergirt, so versteht es sich von selbst, dass sie auch noch convergiren muss, wenn einzelne Glieder negativ werden (vgl. §. 49).

Die Beurtheilung der Beschaffenheit einer solchen Reihe gründen wir auf folgenden einfachen Satz.

Von den zwei Reihen

21) $t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_r + \ldots.$

25) $v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_r + \ldots.$

welche nur positive Glieder enthalten, wird die zweite convergiren, wenn die erste convergirt und zugleich allgemein

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} < \frac{t_{r+1}}{t_r}$$

Dagegen wird die zweite divergiren, wenn die erste divergirt und zugleich allgemein

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} > \frac{t_{r+1}}{t_r}$$

Im ersten Falle nemlich ist

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} < \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2}$$

also

$$\frac{v_3}{v_1} < \frac{t_3}{t_1}$$

ebenso findet man

$$\frac{v_4}{v_1} < \frac{t_4}{t_1}$$

$$\frac{v_5}{v_1} < \frac{t_5}{t_1}$$

u. s. w. Mithin

$$\frac{v_3 + v_4 + v_5 + \ldots}{v_1} < \frac{t_3 + t_4 + t_5 + \ldots}{t_1}$$

oder

$$v_3 + v_4 + v_5 + \ldots < \frac{v_1}{t_1}(t_3 + t_4 + t_5 + \ldots)$$

Ist daher $t_3 + t_4 + t_5 + \ldots$ und mithin die Reihe 21) convergent, so muss auch $v_3 + v_4 + v_5 + \ldots$ eine convergirende Reihe seyn und mithin auch die Reihe 25).

Im zweiten Falle zeigt man ebenso dass

$$\frac{v_3}{v_1} > \frac{t_3}{t_1}, \quad \frac{v_4}{v_1} > \frac{t_4}{t_1} \ldots\ldots$$

also $$v_3 + v_4 + \ldots\ldots > \frac{v_1}{t_1}(t_3 + t_4 + \ldots\ldots)$$

Ist nun $t_3 + t_4 + \ldots$ eine divergirende Reihe, mithin auch die Reihe 21), so ist auch die Reihe 25) divergent.

Nun giebt es aber eine Reihe mit beständig abnehmenden positiven Gliedern, deren Beschaffenheit leicht zu bestimmen ist, und welche daher bei der gegenwärtigen Untersuchung in ähnlicher Weise zur Grundlage dient, wie früher die Reihe 11). Es ist dies die Reihe

26) $$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{r^m} + \ldots\ldots$$

welche **convergirt** oder **divergirt**, je nachdem $m$ **grösser** oder **nicht grösser** als die Einheit ist. Es ist einleuchtend, dass die Glieder wachsen und also die Reihe divergirt, wenn $m$ negativ ist, wir haben daher nur den Fall zu betrachten wenn $m$ positiv ist.

Vergleicht man dann die Reihe mit der Reihe 21) und setzt $t_r = \frac{1}{r^m}$, $t_{r+1} = \frac{1}{(r+1)^m}$ so folgt $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{r^m}{(r+1)^m}$ $= \frac{1}{(1+\frac{1}{r})^m}$. Dieser Ausdruck nähert sich offenbar, mit unbegrenzt wachsendem $r$, der Einheit, und setzt man ihn $= \frac{1}{1+\alpha}$ so ist $\alpha$ positiv und die Reihe gehört folglich zu denen, deren Beschaffenheit jetzt untersucht werden soll.

Ist $m = 1$ so geht 26) in die Reihe

5) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r} \ldots$$

über, deren Divergenz schon bewiesen worden ist (§. 45).

Ist $m < 1$, also $m = 1 - k$ so ist in der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{1-k}} + \frac{1}{3^{1-k}} \ldots + \frac{1}{r^{1-k}} + \ldots$$

jedes Glied $\frac{1}{r^{1-k}} = \frac{r^k}{r}$ grösser als $\frac{1}{r}$ *). Diese Reihe muss also umsomehr divergiren, da die Reihe 5) divergirt.

Sey nun $m > 1$. Man theile die Glieder der Reihe 26) in Gruppen ab, so dass eine solche Gruppe die $k$ Glieder

27) $$\frac{1}{(k+1)^m} + \frac{1}{(k+2)^m} + \ldots + \frac{1}{(2k)^m}$$

enthält. Nun ist offenbar die Summe dieser $k$ Glieder kleiner als $\frac{k}{(k+1)^m}$ und um so mehr kleiner als $\frac{k}{k^m}$ d. h. kleiner als $\frac{1}{k^{m-1}}$. Setzt man aber allmälich statt $k$ die Werthe 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w. so erhält man aus 27) die Gruppen

*) Nur, wenn $r = 1$, ist $\frac{1}{r^{1-k}} = \frac{1}{r}$.

$$\frac{1}{2^m}$$
$$\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m}$$
$$\frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m}$$
u. s. w.

welche zusammenaddirt die Reihe 26), mit Ausnahme des Anfangsgliedes 1), wiedergeben.

Nach dem Vorhergehenden hat man aber

$$\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} < \frac{1}{2^{m-1}}$$
$$\frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} < \frac{1}{4^{m-1}}$$
$$\frac{1}{9^m} + \ldots \frac{1}{16^m} < \frac{1}{8^{m-1}}$$
u. s. w.

also

$$\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots < \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{(2^{m-1})^2} + \frac{1}{(2^{m-1})^3} + \ldots$$

Setzt man nun $\frac{1}{2^{m-1}} = x$, so ist

$$\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{(2^{m-1})^2} + \frac{1}{(2^{m-1})^3} + \ldots = \frac{1}{2^{m-1}} + \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^3$$
$$+ \ldots \qquad = x + x^2 + x^3 + \ldots .$$

diese Reihe convergirt aber, wenn $x < 1$, d.h. wenn $m > 1$, umsomehr muss mithin, in diesem Falle, die Reihe $\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots$ convergiren und folglich auch die Reihe 26).

## 62.

Hieraus ergiebt sich nun weiter folgender Satz:

Wenn die Reihe

25) $\qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_r + \ldots$

nur positive und abnehmende Glieder enthält und man setzt

$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{1+\alpha}$, so dass also $\alpha$ positiv ist, es nähert sich aber $\alpha$, mit unbegrenzt wachsendem $r$, unbegrenzt der Null, so wird die Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem das Produkt $r\alpha$, mit unbegrenzt wachsendem $r$, sich einer Grenze nähert, welche um ein Angebbares grösser oder kleiner ist als die Einheit.

Man nenne diese Grenze $k$. Sey zuerst $k > 1$; man kann also eine Zahl $m$ finden welche zugleich um ein Angebbares kleiner als $k$ und grösser als die Einheit ist. Setzt man daher $k = m + h$, so ist $h$ eine angebbare positive Grösse. Sobald aber $r > 1$ ist, hat man nach Formel 20)

$$(1 + \frac{1}{r})^m = 1 + {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r} + {}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^2} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots$$

also

$$(1 + \frac{1}{r})^m - 1 = {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r} + {}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^2} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots$$

und

$$r\,[(1 + \frac{1}{r})^m - 1] = {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Nun ist (§ 59)

$${}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots$$

eine convergirende Reihe, ihr Werth sey $w$, der Ausdruck

$$\frac{1}{r}\,[{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots] = \frac{w}{r}$$

muss sich also, mit unbegrenzt wachsendem $r$, unbegrenzt der Null nähern, um so mehr muss dies bei dem Ausdruck

$${}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots = \frac{1}{r}\,[{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{1}{r} + \ldots]$$

der Fall seyn. Der Ausdruck $r\,[(1 + \frac{1}{r})^m - 1]$ muss sich also, mit unbegrenzt wachsendem $r$, dem Werthe ${}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} = m$ nähern. Nun ist aber $k = m + h$, d. h. die Grenze welcher sich $r\alpha$ nähert, ist grösser, als die Grenze, welcher sich $r\,[(1 + \frac{1}{r})^m - 1]$

nähert, mithin hat man auch, von irgend einem Werthe des $r$ an gerechnet,

$$\alpha > (1 + \frac{1}{r})^m - 1$$

oder

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{(1+\frac{1}{r})^m}$$

Vergleicht man aber die Reihe 26) mit der Reihe 21) so hat man, wie oben bemerkt wurde (§. 61)

$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{1}{(1+\frac{1}{r})^m}$, folglich $\frac{v_{r+1}}{v_r} < \frac{t_{r+1}}{t_r}$. Da aber $m > 1$, so muss die Reihe 26) convergiren und mithin auch (§. 61) die Reihe 25).

Ist $k$ um ein Angebbares kleiner als die Einheit, so muss von einem gewissen Werthe des $r$ an $r\alpha < 1$ oder $\alpha < \frac{1}{r}$ seyn, also $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{r}}$. Vergleicht man aber die Reihe

$$5) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{r} + \ldots$$

welche divergirt, mit der Reihe 21), indem man $t_r = \frac{1}{r}$ setzt, so ist $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{1}{1+\frac{1}{r}}$, also $\frac{v_{r+1}}{v_r} > \frac{t_{r+1}}{t_r}$ mithin muss die Reihe 25) divergiren.

Untersucht man nach diesem Satze die Reihe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$$

so findet man, dass sie convergirt. Hier ist $v_r = \frac{1.3 \ldots 2r-1}{2.4 \ldots 2r} \cdot \frac{1}{2r+1}$ und $v_{r+1} = \frac{1\,.\,3\,.\,.\,.\,2r+1}{2\,.\,4 \ldots 2r+2} \cdot \frac{1}{2r+3}$ mithin $\frac{v_{r+1}}{v_r}$

$$= \frac{(2r+1)^2}{(2r+2)(2r+3)} = \frac{1}{1+\frac{3}{2r+1}+\frac{2}{(2r+1)^2}}$$

und $\alpha = \frac{3}{2r+1} + \frac{2}{(2r+1)^2}$, also nähert sich $\alpha$ unbegrenzt dem Werthe Null.

Aber $r\alpha > \frac{3r}{2r+1}$ oder $r\alpha > \frac{3}{2+\frac{1}{r}}$

Nun nähert sich der Ausdruck $\frac{3}{2+\frac{1}{r}}$, mit unbegrenzt wachsendem $r$, dem Werthe $\frac{3}{2}$, also ist $k$ um ein Angebbares grösser als die Einheit.

Dagegen divergirt die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots$$

denn hier ist $v_r = \frac{1.3..2r-1}{2.4..2r}$, $v_{r+1} = \frac{1.3...2r+1}{2.4...2r+2}$ also

$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{2r+1}{2r+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2r+1}}$ und $\alpha = \frac{1}{2r+1}$ mithin

$r\alpha = \frac{r}{2r+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{r}}$ d. h. $k = \frac{1}{2}$; also $k$ um ein Angebbares kleiner als die Einheit.

63.

Es wurde früher (§. 59) nachgewiesen dass die Reihe

$$\overset{1}{{}_m\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}_m\mathfrak{B}} + \overset{3}{{}_m\mathfrak{B}} + \ldots$$

wenn $m$ einen positiven gebrochenen oder irrationalen Werth bedeutet, convergirt und von dem Gliede $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ an abwechselnde Zeichen hat, sobald $r > m$. Diese Reihe wird aber auch noch convergiren, wenn man allen Gliedern, von $\overset{r}{{}_m\mathfrak{B}}$ an,

dasselbe Zeichen giebt. Diese neue Reihe erhält man nemlich wenn man $\overset{r}{{}^{m}\mathfrak{B}}$ mit $\dfrac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ statt mit $-\dfrac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ multiplicirt, und dieselbe Veränderung bei den Quotienten der folgenden Glieder macht. Setzt man aber $\dfrac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}} = \dfrac{1}{1+\alpha}$ so folgt $\alpha = \dfrac{1+\frac{1}{r}}{1-\frac{m}{r}} - 1$ $= \dfrac{\frac{1}{r}+\frac{m}{r}}{1-\frac{m}{r}}$, mithin $r\alpha = \dfrac{1+m}{1-\frac{m}{r}}$ welcher Ausdruck, mit unbegrenzt wachsendem $r$ sich dem Werthe $1+m$ unbegrenzt nähert, also $k = 1+m$, mithin convergirt die Reihe. Setzt man $m = \frac{p}{q}$ wo $p$ und $q$ positive ganze Zahlen sind, so hat man (§. 41)

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \mathrel{=\!\!\!\!\mid} \Sigma\, \overset{r}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^r$$

d. h. $$(1+\overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}}x^2 + \ldots)^q \mathrel{=\!\!\!\!\mid} (1+x)^p$$

also $$(1+\overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \ldots)^q \mathrel{=\!\!\!\!\mid} (1+1)^p$$

Da nun, wie soeben bewiesen wurde, die Reihe $1+\overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \ldots$ auch dann noch convergent bleibt, wenn man allen Gliedern das positive Zeichen giebt, so folgt aus §. 58 dass auch

$$(1+\overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} \ldots)^q = (1+1)^p = 2^p$$

oder $$(1+1)^{\frac{p}{q}} = 2^{\frac{p}{q}} = 1+\overset{1}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}} + \ldots$$

Die Gleichung $(1+x)^{\frac{p}{q}} = \Sigma \overset{\frac{p}{q}}{\mathfrak{B}}{}_r\, x^r$ welche früher (§. 56) für $x < 1$ bewiesen wurde, gilt also auch für $x = 1$, und indem man die dortige Beweisführung unverändert wiederholt, sieht man, dass diese Gleichung auch dann noch für $x = 1$ gilt, wenn man statt $\frac{p}{q}$ einen irrationalen positiven Werth setzt.

Es wurde ferner (§. 60) gezeigt, dass wenn man $-m$ statt $m$ setzt, die Reihe

$$\overset{1}{{}_{-m}\mathfrak{B}} + \overset{2}{{}_{-m}\mathfrak{B}} + \ldots$$

nicht convergirt wenn $m \gtreqless 1$ ist, dagegen convergirt wenn $m < 1$. In diesem letzteren Falle wird aber die Reihe divergiren, wenn man statt der wechselnden Zeichen, mit welchen die Reihe von Anfang an versehen ist, allen Gliedern dasselbe Zeichen gibt. Um nemlich diese neue Reihe zu erhalten, müsste man statt des Quotienten $-\dfrac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ den Quotienten $\dfrac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ nehmen. Setzt man aber $\dfrac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}} = \dfrac{1}{1+\alpha}$ so ist $\alpha = \dfrac{\frac{1}{r}-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}$ also $r\alpha = \dfrac{1-m}{1+\frac{m}{r}}$, dieser Ausdruck nähert sich, mit unbegrenzt wachsendem $r$, dem Werthe $1-m$, welcher kleiner als die Einheit ist, mithin divergirt die Reihe. Nichts destoweniger gilt, wenn wieder $m = \frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q} < 1$ ist, die Gleichung

$$(1+1)^{-\frac{p}{q}} = 1 + \overset{-\frac{p}{q}}{\mathfrak{B}}{}_1 + \overset{-\frac{p}{q}}{\mathfrak{B}}{}_2 + \ldots.$$

Denn es ist (Kap. 5 Form. 36)

$$\Sigma\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r \,.\, \Sigma\,{}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r \neq 1$$

Nun sind, sobald $\frac{p}{q} < 1$, sowohl $\Sigma\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ als $\Sigma\,{}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ convergirende Reihen, und das ihrer Multiplication entsprechende Produkt ist der endliche Werth 1, mithin ebenfalls eine convergirende Reihe. Daher hat man nach §. 54

$$\Sigma\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} \,.\, \Sigma\,{}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = 1$$

oder $$\Sigma\,{}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\Sigma\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}}$$

aber $$\Sigma\,{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = (1+1)^{\frac{p}{q}}$$

also $$\Sigma\,{}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} = (1+1)^{-\frac{p}{q}} = 2^{-\frac{p}{q}}$$

Auch hier kann man wieder leicht zeigen, dass man statt $\frac{p}{q}$ einen irrationalen positiven Werth setzen darf, sobald derselbe kleiner als die Einheit ist.

In der Reihe

$$1 - m\overset{1}{\mathfrak{B}} + m\overset{2}{\mathfrak{B}} - m\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots$$

bezeichne wieder $m$ eine positive gebrochene oder irrationale Zahl. Hier ist $\dfrac{\pm\, m\overset{r+1}{\mathfrak{B}}}{\mp\, m\overset{r}{\mathfrak{B}}} = \dfrac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$ mithin, wenn man diesen Quotienten $= \dfrac{1}{1+\alpha}$ setzt, $\alpha = \dfrac{\frac{1}{r}+\frac{m}{r}}{1-\frac{m}{r}}$, also nähert sich $r\alpha$ der Grenze $1+m$, welche grösser als die Einheit ist, mithin convergirt die Reihe. Da aber $1-\frac{m}{r}$ positiv ist, so-

bald $r > m$, so sind von da an alle Glieder mit demselben Zeichen versehen.

Setzt man $-m$ statt $m$, so ist der Quotient der zwei aufeinanderfolgenden Glieder $\dfrac{1+\frac{m}{r}}{1+\frac{1}{r}}$, die Glieder haben also von Anfang an dasselbe Zeichen. Allein da sich nun $r\alpha$ der Grenze $1-m$ nähert, welche kleiner als die Einheit ist, so divergirt die Reihe.

Der Ausdruck

$$(1+x)^m \ddagger \Sigma\, {}_m\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

geht wenn man $x = -1$ setzt, in

$$(1-1)^m \ddagger \Sigma\, {}^m\overset{r}{\mathfrak{B}} \,.\, (-1)^r$$

über, und wenn $m = \frac{p}{q}$ so folgt

$$[\Sigma\, {}_{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}(-1)^r]^q \ddagger (1-1)^p$$

d. h. $$[1 - {}_{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}_{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} - {}_{\frac{p}{q}}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots]^q \ddagger (1-1)^p$$

Da nun eben nachgewiesen wurde, dass die Reihe $1 - {}_{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}_{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} - \ldots$ von einem gewissen Gliede an dasselbe Zeichen behält und convergirt, so hat man auch

$$[1 - {}^{\frac{p}{q}}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{p}{q}}\overset{2}{\mathfrak{B}} - {}^{\frac{p}{q}}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots]^q = (1-1)^p = 0$$

oder $$0 = (1-1)^{\frac{p}{q}} = \Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,(-1)^r$$

und auch hier kann man wieder nachweisen, dass diese Gleichung ihre Geltung behält, wenn man statt $\frac{p}{q}$ eine positive irrationale Zahl setzt.

Dagegen darf man das Zeichen des Entsprechens nicht durch das Gleichheitszeichen ersetzen, wenn man $-m$ statt $m$ setzt, weil dann die Reihe $1 - {}_{-m}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}_{-m}\overset{2}{\mathfrak{B}} - \ldots$ divergirt.

64.

Stellt man das Vorhergehende mit dem Ergebniss des §. 57 zusammen, so hat man nun folgendes allgemeine Resultat. Man hat, wenn $m$ keine ganze positive Zahl ist, die Gleichung

$$20) \qquad (1+x)^{m} = \sum {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r}$$

wenn erstens der Zahlenwerth von $x < 1$, oder wenn zweitens $x = 1$ und zugleich $m$ entweder positiv ist, oder negativ und zwischen 0 und $-1$ liegt, endlich drittens wenn $x = -1$ und zugleich $m$ positiv. Ist $m$ eine ganze positive Zahl, so gilt die Gleichung 20) für jeden Werth von $x$, dann ist aber die Reihe $\sum {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r}$ keine unendliche, sondern fällt mit der endlichen Reihe $\sum\limits_{0,m}^{r} {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r}$ zusammen. In allen übrigen Fällen muss in 20) statt des Gleichheitszeichens das Zeichen des Entsprechens beibehalten werden, dann kann also der Werth von $(1+x)^{m}$ nicht mehr durch die entsprechende Reihe ausgedrückt werden.

Sind $(1+x)^{m}$, $(1+x)^{n}$, $(1+x)^{m+n}$ so beschaffen, dass man ihre Werthe vermittelst der Gleichung 20) berechnen kann, so gilt für diese Werthe auch die Gleichung

$$28) \qquad 1+x)^{m}(1+x)^{n} = (1+x)^{m+n}$$

d. h. man hat

$$29) \qquad \sum {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} \,.\, \sum {}_{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} = \sum {}_{m+n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r}$$

Setzt man nemlich

$$\sum {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} \,.\, \sum {}_{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} \doteqdot \sum A_{r} x^{r}$$

also

$$(1 + {}_{m}\overset{1}{\mathfrak{B}} x + {}_{m}\overset{2}{\mathfrak{B}} x^{2} \,..\, + {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} + \ldots)(1 + {}_{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} x + {}_{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} x^{2} \,..\, + {}_{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} + \ldots)$$
$$\doteqdot 1 + A_{1} x + A_{2} x^{2} \,..\, + A_{r} x^{r} + \ldots$$

so findet man

$$A_{r} = {}_{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}_{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, {}_{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}_{m}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, {}_{n}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}_{m+n}\overset{r}{\mathfrak{B}} \quad \text{(Kap. 5 Form 27)}$$

also $$\sum {}_{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} \,.\, \sum {}_{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r} \doteqdot \sum {}_{m+n}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{r}$$

Nun sind, nach unserer Voraussetzung, die drei in diesem Ausdrucke vorkommenden Reihen convergent, folglich kann man das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen (§. 54).

65.

An das Vorhergehende knüpft sich aber nun folgende wichtige Frage. Wenn $m$ eine ganze positive Zahl ist, so bedeutet $(1+x)^m$ das Produkt von $m$ Faktoren, von welchen jeder $1+x$ ist. Dieses Produkt hat also einen ganz bestimmten Werth, welchen man, vermittelst der gleichgeltenden Reihe, nach Formel 20) berechnen kann. Ist $m$ eine ganze negative Zahl, etwa $m = -m'$, wo $m'$ positiv ist, so bedeutet $(1+x)^m = (1+x)^{-m'}$ soviel als $\frac{1}{(1+x)^{m'}}$. Insofern nun $(1+x)^{m'}$ einen ganz bestimmten Werth hat, muss dies auch bei $(1+x)^m$ der Fall seyn. Ist $x < 1$, so dass die Formel 20) gültig ist, so muss man auch diesen einzigen Werth, welchen $(1+x)^m$ hat, finden, wenn man die gleichgeltende Reihe berechnet. Anders aber ist es, wenn $m$ eine gebrochene Zahl ist. Sind $p$ und $q$ ganze positive Zahlen und man setzt $(1+x)^m = (1+x)^{\frac{p}{q}}$, so bedeutet dies einen Ausdruck, welcher so beschaffen ist, dass, wenn man ihn auf die Potenz $q$ erhebt, sich der bestimmte Werth $(1+x)^p$ ergiebt. Gilt nun die Formel 20), so wissen wir, dass die Reihe $\Sigma \overset{\frac{p}{q}}{\mathfrak{B}}{}^r x^r$ ein solcher Ausdruck ist. Aber ist dies der einzige Ausdruck, welcher der gestellten Forderung Genüge leistet, oder giebt es nicht vielmehr verschiedene Ausdrücke, welche die gemeinschaftliche Eigenschaft haben, dass ihre $q$te Potenz den Werth $(1+x)^p$ hat? Mit anderen Worten, ist nicht vielleicht der Ausdruck $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ nach der Definition, welche wir von demselben ge-

geben haben, ein **vieldeutiger**, und wenn dies der Fall seyn sollte, wie **viel** verschiedene Bedeutungen hat er?

Setzt man für $x$ einen bestimmten Werth und $1+x=a$, so lehrt die Arithmetik, dass $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ nur einen einzigen Werth hat, wenn $q$ eine ungerade Zahl ist, und dies ist auch richtig, insofern dieser Werth, welcher $\alpha$ heisse, ein **reeller** seyn soll. Gäbe es nemlich ausser diesem Werthe noch einen anderen reellen $\beta$, so hätte man $\sqrt[q]{a^p}=\alpha$ und $\sqrt[q]{a^p}=\beta$, also $\beta^q=\alpha^q$, was nicht seyn kann, wenn nicht $\alpha=\beta$. Da nun $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r x^r$ ein reeller Werth ist, so folgt, dass dieser Ausdruck, wenn $q$ ungerade ist, für jedes bestimmte $x$ mit dem, nach den Regeln der Arithmetik berechneten Werthe von $\sqrt[q]{(1+x)^p}$ übereinstimmen muss. Dagegen bleibt es noch die Frage, ob es nicht **imaginäre** Werthe giebt, welche so beschaffen sind, dass ihre $q$te Potenz den Werth $(1+x)^p$ hat.

Ist dagegen $q$ eine gerade Zahl, so giebt es allerdings neben dem reellen Werthe $\alpha$ noch einen zweiten reellen Werth $\beta=-\alpha$, insofern dann $(-\alpha)^q=\alpha^q$ ist. Es ist also klar, dass $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r x^r$ einem dieser reellen Werthe gleich seyn muss. Es wird aber diese Reihe, wie wir leicht beweisen können, jedesmal dem **positiven** Werthe von $\sqrt[q]{a^p}$ gleich seyn, welches immer der Werth von $x$ seyn mag.

Sey nemlich zuerst $x$ positiv und $\frac{p}{q}$ positiv. Sey $m$ eine ganze positive Zahl, so beschaffen, dass $\frac{p}{q}>m-1$ und $\frac{p}{q}<m$. In der Reihe

$$\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r x^r = 1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\,.\,2}x^2+\ldots\ldots$$

wird man an ein Glied

$$\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{p}{q}-m\right)}{1\,.\,2\,\ldots\,m+1}\,x^{m+1}$$

kommen, in dessen Zähler der letzte Faktor negativ ist, während alle vorhergehenden Faktoren positiv sind. Dieses Glied wird also negativ seyn. Die folgenden Glieder werden ebendeswegen abwechselnd positiv und negativ seyn, während die vorhergehenden sämmtlich positiv sind. Schreibt man also die Reihe in der Form

$$1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\,.\,2}x^2+\ldots+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-m+1\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,m}\,x^m\left(1-\frac{m-\frac{p}{q}}{m+1}\,x\right)$$

$$+\frac{\frac{p}{q}\ldots\left(\frac{p}{q}-m\right)\left(\frac{p}{q}-(m+1)\right)}{1\,\ldots\ldots\,m+2}\,x^{m+2}\left(1-\frac{m+2-\frac{p}{q}}{m+3}\,x\right)+\ldots.$$

so ist jedes Glied positiv, da $x \leqq 1$, also $\frac{m-\frac{p}{q}}{m+1}\,x$, $\frac{m+2-\frac{p}{q}}{m+3}\,x$ u. s. w. ächte Brüche sind. Mithin ist der durch diese Reihe ausgedrückte Werth von $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ d. h. $\Sigma\,{\frac{p}{q}}_r\mathfrak{B}x^r$ positiv *).

Ist $x$ positiv aber der Exponent negativ und $-\frac{p}{q}$ so ist wie früher (§§. 56 u. 63) gezeigt wurde

$$\Sigma\,{-\frac{p}{q}}_r\mathfrak{B}x^r = \frac{1}{\Sigma\,{\frac{p}{q}}_r\mathfrak{B}x^r}$$

also ebenfalls positiv.

---

*) Es ist daher in der oben (§. 63) gefundenen Gleichung $2^{\frac{p}{q}} = 1 + {\frac{p}{q}}\mathfrak{B} + \ldots$ für $2^{\frac{p}{q}}$ immer der positive Werth dieses Ausdrucks zu nehmen.

Ist $x$ negativ, so setze man statt dessen $-x$, so dass $x$ wieder positiv ist; ist zugleich der Exponent negativ, so hat man

$$(1-x)^{-\frac{p}{q}} = 1 + (-\frac{p}{q}.-x) + \frac{-\frac{p}{q}.(-\frac{p}{q}-1)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots$$

$$= \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r (-x)^r$$

Hier ist das allgemeine Glied

$$\frac{-\frac{p}{q}.(-\frac{p}{q}-1)\ldots(-\frac{p}{q}-r)}{1\,.\,2\ldots r+1}(-x)^{r+1}$$

$$= (-1)^{2r+2}\frac{\frac{p}{q}.(\frac{p}{q}+1)\ldots(\frac{p}{q}+r)}{1\,.\,2\ldots r+1}x^{r+1}$$ es ist also jedes Glied der Reihe positiv, mithin auch ihre Summe $\Sigma\,.\,{}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r(-x)^r$

Ist endlich $(1-x)^{\frac{p}{q}}$ zu betrachten, so hat man wieder

$$\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r (-x)^r = \frac{1}{\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r (-x)^r}$$

also muss auch $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}_r (-x)^r$ positiv seyn.

Aber auch in diesem Falle, wo $q$ gerade ist, ist nun die Frage, ob es nicht neben den zwei reellen Werthen noch imaginäre giebt, deren $q$te Potenz den Werth $(1+x)^p$ hat. Die Beantwortung dieser wichtigen Frage soll in den folgenden Kapiteln vorbereitet und erledigt werden. Hier bemerke man nur noch, dass man, nach dem Vorhergehenden, die Binomialformel dazu benutzen kann, den positiven reellen Werth des Ausdrucks $\sqrt[q]{A}$ direkt durch eine convergirende Reihe zu berechnen, sobald $A$ positiv und $\leqq 2$ ist. Denn je nachdem $A$ zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und 2 liegt, setze man $A = 1 - x$ oder $A = 1 + x$, wo mithin jedenfalls $x \leqq 1$, dann hat man

$$\sqrt[q]{A} = (1 \mp x)^{\frac{1}{q}} = 1 \mp \frac{1}{q}\, x + \frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{1\,.\,2}\, x^2 \dots .$$

$$= 1 \mp \frac{1}{q}\,(A-1) + \frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{1\,.\,2}\,(A-1)^2 \mp \dots$$

Wollte man also z. B. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ berechnen, so hätte man $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

$$= \left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\,.\,2} \cdot \frac{1}{16}$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{1}{64} + \dots$$

also (vgl. §. 59)

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} > 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1\,.\,2} \cdot \frac{1}{16}\left(1 - \frac{\frac{5}{3}}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)$$

d. h: $\sqrt[3]{\frac{5}{4}} > 1{,}076$ und $< 1{,}0777$; der wahre Werth ist 1,0772 . . .

Scheint demnach diese Anwendung der Binomialformel sehr beschränkt zu seyn, so bedarf es in der That nur eines kleinen Kunstgriffs, um sie auch dann zur Berechnung von $\sqrt[q]{A}$ anwenden zu können, wenn $A > 2$ ist. Denn man setze $A = h + x = x\left(1 + \frac{h}{x}\right)$ so dass $x > h$ und $\frac{h}{x} < 1$ mithin

$$\sqrt[q]{A} = x^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{1}{q} \cdot \frac{h}{x} + \dots .\right.$$

$$= (A-h)^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{1}{q} \cdot \frac{h}{A-h} + \frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)}{1\,.\,2} \cdot \frac{h^2}{(A-h)^2} + \dots .\right)$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nemlich $A$ kleiner als das Doppelte der nächst kleineren Zahl $a$, welche eine $q$te Potenz und etwa $= b^q$ ist, dann kann man $x = b^q$ setzen, also ist $h < b^q$ und $(A - h)^{\frac{1}{q}} = b$ mithin

$$\sqrt[q]{A} = b\left(1 + \frac{1}{q} \cdot \frac{h}{b^q} + \frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{b^{2q}} + \ldots\right)$$

Um also z. B. $\sqrt[3]{9}$ zu finden, schriebe man $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{8}\right)}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{64} + \ldots\right]$$

und fände unter Benutzung der drei ersten Glieder der Reihe, $\sqrt[3]{9} < 2{,}083\ldots$ und $> 2{,}079\ldots$ während der wahre Werth $2{,}080\ldots$ ist.

Derselbe Kunstgriff reicht auch noch aus wenn $A = 2a$, also $x = h$ und $\frac{h}{x} = 1$ ist.

Ist aber $A > 2a$, so muss man ein anderes Verfahren anwenden, welches übrigens auch im vorhergehenden Falle gebraucht werden kann. Wie nemlich $A$ beschaffen sey, so kann man immer $A = x - h$ setzen, man nehme nun für $x$ die nächst grössere Zahl als $A$, welche zugleich eine $q$te Potenz ist, sie heisse $c = e^q$, dann ist $A = e^q - h = e^q\left(1 - \frac{h}{e^q}\right)$.

Nun ist $h$ eine positive Zahl, welche kleiner als $e^q$ ist, mithin $\frac{h}{e^q} < 1$ und

$$A^{\frac{1}{q}} = e\left(1 - \frac{h}{e^q}\right)^{\frac{1}{q}} = e\left(1 - \frac{e^q - A}{e^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= e\left[1 - \frac{1}{q} \cdot \frac{e^q - A}{e^q} + \frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{1 \cdot 2} \frac{(e^q - A)^2}{e^{2q}} - \ldots\right]$$

In der eingeklammerten Reihe werden alle auf die Einheit fol-

genden Glieder negativ; die Näherungswerthe von $A^{\frac{1}{q}}$ die man erhält, indem man irgendwo in der Reihe stehen bleibt, und die folgenden Glieder vernachlässigt, sind daher grösser als der wahre Werth.

Um nach diesem Verfahren $\sqrt[3]{9}$ zu finden, müsste man $c = 27 = 3^3$ setzen, also

$$\sqrt[3]{9} = 3[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{27} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1.2} (\frac{18}{27})^2 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{1.2.3} (\frac{18}{27})^3 - \ldots]$$

oder

$$\sqrt[3]{9} = 3[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1.2} (\frac{2}{3})^2 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{1.2.3} (\frac{2}{3})^3 - \ldots]$$

Die Näherungswerthe sind: 3; 2,33 . .; 2,18 . . .; 2,13 . . .; 2,10 . . . u. s. w. Hier ist es also rathsamer das frühere Verfahren zu benutzen, welches zu einer rascher convergirenden Reihe führt, weil 9 näher bei 8 als bei 27 ist. Sollte aber z. B. $\sqrt[3]{20}$ gefunden werden, so gäbe das allein hier anwendbare zweite Verfahren

$$\sqrt[3]{20} = 3[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{27} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1.2} (\frac{7}{27})^2 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{1.2.3} (\frac{7}{27})^3 - \ldots]$$

Die Näherungswerthe sind: 3; 2,740..; 2,718..; 2,715... Der wahre Werth ist 2,714...

## 66.

Ehe wir dieses Kapitel beschliessen, sollen noch die früheren Untersuchungen über die Beschaffenheit der Reihen vervollständigt werden.

Der in §. 62 bewiesene Satz lässt die Beschaffenheit der Reihe 25) unentschieden, wenn die Grenze $k$, welcher sich $r\alpha$ unbegrenzt nähert, die Einheit selbst ist. Nur so viel lässt sich noch sagen, dass in diesem Falle die Reihe sicher divergiren wird, wenn $r\alpha$ sich zwar unbegrenzt der Einheit nähert, jedoch, von einem bestimmten $r$ an, immer kleiner als diese

Grenze bleibt. Denn da alsdann $\alpha < \frac{1}{r}$ also $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{r}}$

so divergirt die Reihe. Man kann dies sogar noch verallgemeinern; die Reihe wird nemlich auch dann noch divergiren, wenn zwar $\alpha > \frac{1}{r}$ aber zugleich $\alpha < \frac{1}{r-h}$ wo $h$ irgend eine bestimmte Zahl bedeutet. Denn nun ist $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{r-h}}$

aber $\frac{1}{1+\frac{1}{r-h}}$ ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder in der divergirenden Reihe (§. 46)

$$\frac{1}{1-h} + \frac{1}{2-h} + \frac{1}{3-h} + \ldots + \frac{1}{r-h} + \frac{1}{r+1-h} + \ldots$$

Hieraus ergiebt sich z. B. dass die Reihe

$$\left(\frac{log\ 2}{2}\right)^a + \left(\frac{log\ 3}{3}\right)^a + \left(\frac{log\ 4}{4}\right)^a \ldots + \left(\frac{log\ r}{r}\right)^a + \ldots .$$

wo sich die Logarithmen auf ein System beziehen, in welchem sie unbegrenzt mit den Zahlen wachsen (also die Basis grösser als die Einheit ist), convergirt oder divergirt je nachdem $a$ grösser ist als die Einheit, oder nicht.

Setzt man nemlich $v_r = \left(\frac{log\ r}{r}\right)^a$ und

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \left[\frac{log\ (r+1)}{log\ r}\right]^a \cdot \left(\frac{r}{r+1}\right)^a = \frac{1}{1+\alpha}$$

so ist

$$\alpha = \left[\frac{log\ r}{log\ (r+1)}\right]^a \left(\frac{r+1}{r}\right)^a - 1$$

oder, da $log(r+1) = log\ r + \log\ (1 + \frac{1}{r})$

$$\alpha = \left[\frac{1}{1 + \frac{log\ (1+\frac{1}{r})}{log\ r}}\right]^a \left(1 + \frac{1}{r}\right)^a - 1$$

und

$$ra = \left[\frac{1}{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}}\right]^{a} r(1+\frac{1}{r})^{a} - r$$

Nun nähert sich $r\,(1 + \frac{1}{r})^{a}$ mit wachsendem $r$ unbegrenzt dem Werthe $r + a$ (§. 62), dagegen nähert sich $\frac{1}{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}}$ unbegrenzt der Einheit, obgleich sein Werth immer unter dieser Grenze bleibt, da der Bruch $\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}$ immer positiv bleibt, während der Zähler mit wachsendem $r$ sich immer mehr der Null nähert, und der Nenner unbegrenzt wächst. Mithin wird $\left[\frac{1}{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}}\right]^{a} \cdot r\,(1 + \frac{1}{r})^{a}$ zwar immer kleiner als $r + a$ bleiben, sich aber diesem Werthe unbegrenzt nähern, und folglich wird $ra$ zwar immer kleiner als $a$ bleiben, sich aber diesem Werthe unbegrenzt nähern. Ist nun $a > 1$, so ist auch die Grenze $k > 1$, mithin convergirt die Reihe, ist dagegen $a < 1$ so ist auch $k < 1$ und die Reihe divergirt; ist $a = 1$ so ist noch immer $ra < 1$, d. h. $\alpha < \frac{1}{r}$ und die Reihe divergirt.

## 67.

Als ein specieller Fall des hier vervollständigten Satzes, ist auch die merkwürdige Regel anzusehen, welche Gauss gegeben hat*) und die so lautet:

*) Disquisit. gen. circa seriem infinit. Sect. III (Comment. soc. reg. Gotting. T. 2).

Wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $v_r, v_{r+1}$ sich in der Form

$$\frac{r^q + A_1 r^{q-1} + A_2 r^{q-2} + \ldots + A_m}{r^q + a_1 r^{q-1} + a_2 r^{q-2} + \ldots + a_m}$$

darstellen lässt, wo $q$ eine ganze positive Zahl bedeutet, und es sind Zähler und Nenner nicht identisch, also nicht zugleich $A_1 - a_1 = 0$, $A_2 - a_2 = 0$ u. s. w. so wird die Reihe convergiren, wenn $a_1 - A_1$ positiv und grösser als die Einheit ist, in allen anderen Fällen aber divergiren.

Setzt man nemlich $\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{1+\alpha}$ so ist nun

$$\alpha = \frac{(a_1 - A_1) r^{q-1} + (a_2 - A_2) r^{q-2} + \ldots}{r^q + A_1 r^{q-1} + A_2 r^{q-2} + \ldots} = \frac{a_1 - A_1 + (a_2 - A_2)\frac{1}{r} + \ldots}{r + A_1 + A_2 \cdot \frac{1}{r} + \ldots}$$

Dieser Werth von $\alpha$ nähert sich, mit unbegrenzt wachsendem $r$, immer mehr dem Werthe Null; von einem gewissen $r$ an, ist mithin der Quotient $\frac{v_{r+1}}{v_r}$ jedenfalls positiv und die Glieder der Reihe haben, von da an, alle dasselbe Zeichen. Ferner ist

$$r\alpha = \frac{a_1 - A_1 + (a_2 - A_2)\frac{1}{r} + \ldots}{1 + \frac{A_1}{r} + A_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots}$$

Es nähert sich also $r\alpha$ unbegrenzt dem Werthe $a_1 - A_1$. Ist nun $a_1 - A_1$ negativ, so wird mithin, von einem gewissen $r$ an, $r\alpha$ negativ und folglich auch $\alpha$, also divergirt die Reihe (§. 58). Ist $a_1 - A_1$ positiv und kleiner als die Einheit, so ist $k < 1$ mithin divergirt die Reihe. Ist $a_1 - A_1 = 0$ und etwa auch $a_2 - A_2 = 0$, $a_3 - A_3 = 0 \ldots$ so dass $a_i - A_i$ die erste nicht verschwindende Differenz ist, so ist

$$r\alpha = \frac{(a_i - A_i)\frac{1}{r^{i-1}} + \ldots}{1 + \frac{A_1}{r} + A_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots}$$ der Zähler dieses Aus-

drucks nähert sich aber der Grenze Null, also auch $k = 0$ und die Reihe divergirt. Ist $a_1 - A_1 = 1$, so nähert sich $\alpha$ mit wachsendem $r$, unbegrenzt dem Werthe $\frac{a_1 - A_1}{r + A_1} = \frac{1}{r + A_1}$; ist nun $A_1$ positiv, so bleibt mithin immer $\alpha < \frac{1}{r}$, ist $A_1$ negativ $= -B_1$ so setze man $B_1 + 1 = k$, die Grenze $\frac{1}{r - B_1}$ welcher sich $\alpha$ nähert, ist also kleiner als $\frac{1}{r - k}$ mithin divergirt die Reihe. Ist endlich $a_1 - A_1$ positiv und grösser als die Einheit, so ist $k > 1$ und die Reihe convergirt.

## 68.

Nach §. 66 bleibt die Beschaffenheit der Reihe im Allgemeinen unentschieden wenn $k = 1$ und zugleich von einem gewissen $r$ten Gliede an beständig $\alpha > \frac{1}{r}$ ist. Dieser Ausnahmefall tritt z. B. bei der Reihe

$$29) \quad \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \ldots \text{*)}$$

ein. Denn setzt man hier

$$v_r = \frac{1}{r \log r} \text{ so ist } \frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{r \log r}{(r+1) \log (r+1)} \text{ also}$$

$$\alpha = \frac{(r+1) \log (r+1)}{r \log r} - 1 = \frac{(r+1) \frac{\log (r+1)}{\log r} - r}{r}$$

nun ist $\frac{(r+1) \log (r+1)}{\log r} > r + 1$, also $\alpha > \frac{1}{r}$.

Man kann aber nicht blos beweisen, dass diese Reihe divergirt, sondern auch folgenden allgemeineren Satz aussprechen:

---

*) Im Folgenden bis zu Ende des Kapitels wird vorausgesetzt, dass sich die Logarithmen auf ein Potenzensystem beziehen, dessen Basis grösser als 2 ist, so dass *log*. 2 ein positiver ächter Bruch ist. Dies gilt namentlich von den natürlichen Logarithmen, von welchen später (Kap. 7 §. 79) die Rede seyn wird.

Die Reihe

$$30)\quad 1+\frac{1}{2\,(\log 2)^m}+\frac{1}{3\,(\log 3)^m}+\ldots$$

wird convergiren oder divergiren, je nachdem $m$ grösser oder nicht grösser als die Einheit ist.

Nimmt man nemlich aus dieser Reihe die aus $2^n$ Gliedern bestehende Gruppe

$$\frac{1}{(2^n+1)\,[\log(2^n+1)]^m}+\frac{1}{(2^n+2)\,[\log(2^n+2)]^m}\ldots$$
$$+\frac{1}{2^{n+1}[\log 2^{n+1}]^m}$$

heraus, so ist jedes vorhergehende Glied grösser als das folgende, umsomehr grösser als das letzte, mithin die ganze Gruppe grösser als $\frac{2^n}{2^{n+1}[\log 2^{n+1}]^m}$ d. h. grösser als $\frac{1}{2\,(n+1)^m\,(\log 2)^m}$.

Setzt man nun allmälich in dieser Gruppe $n=1, 2, 3, \ldots$ und addirt die entstehenden Ausdrücke, so erhält man die Reihe

$$\frac{1}{3\,(\log 3)^m}+\frac{1}{4\,(\log 4)^m}+\ldots$$

welche also grösser als $\frac{1}{2\,(\log 2)^m}\left[\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots\right]$ ist. Nun divergirt die Reihe $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots$ sobald $m \overline{\leqq} 1$ (§. 61) also auch die Reihe 30). Andererseits ist die betrachtete Gruppe kleiner als $\frac{2^n}{(2^n+1)\,[\log(2^n+1)]^m}$ und um so mehr kleiner als $\frac{1}{(\log 2^n)^m}$ d. h. kleiner als $\frac{1}{n^m(\log 2)^m}$, folglich

$$\frac{1}{3(\log 3)^m}+\frac{1}{4(\log 4)^m}+\ldots<\frac{1}{(\log 2)^m}\left[\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots\right]$$

Da nun $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots$ convergirt wenn $m>1$, so muss dann um so mehr die Reihe 30) convergiren.

69.

Hiervon ausgehend kann man nun für den erwähnten Ausnahmefall folgende Regel aufstellen. Ist $\frac{v_{r+1}}{v_r}=\frac{1}{1+\alpha}$, $\lim r\alpha=1$ und zugleich $\alpha>\frac{1}{r}$ so setze man

$$\frac{v_{r+1}}{v_r}=\frac{1}{(1+\frac{1}{r})(1+\alpha_1)}$$

wo $\alpha_1$ eine positive Zahl bedeutet, welche mit wachsendem $r$ unter jede angebbare Grenze sinkt. Ist nun

$$\lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\alpha_1\right]=k_1$$

so wird die Reihe 25) convergiren oder divergiren je nachdem $k_1$ um ein Angebbares grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Im ersten Falle wähle man eine Zahl $m$, welche zugleich grösser als die Einheit und kleiner als $k_1$ ist. Nun ist in der Reihe 30) der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{r}{r+1}\left(\frac{\log r}{\log(r+1)}\right)^m=\frac{1}{1+\frac{1}{r}}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}\right]^m}$$

da nun, $\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}<1$ sobald $r>1$, so hat man vermöge der Binomialformel (§. 64)

$$\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}\right]^m=1+{}^m\mathfrak{B}^1.\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}+{}^m\mathfrak{B}^2\left[\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}\right]^2+\ldots$$

Setzt man $\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}\right]^m - 1 = h$, so findet man, wenn man die Entwickelung des §.62 wiederholt, $\lim\left[\frac{\log r}{\log(1+\frac{1}{r})}\,h\right]$

$= m\mathfrak{B}^{1} = m$, also $\lim\left[\frac{\log r}{\log(1+\frac{1}{r})}\,h\right] = \lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\,h\right] < k_1$

mithin, da $\lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\,\alpha_1\right] = k_1$, so muss von einem bestimmten $r$ an, $h < \alpha_1$ seyn,

aber $\frac{1}{(1+\frac{1}{r})} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{r})}{\log r}\right]^m} = \frac{1}{(1+\frac{1}{r})(1+h)}$

mithin $\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{(1+\frac{1}{r})(1+\alpha_1)} < \frac{1}{(1+\frac{1}{r})(1+h)}$

Da nun die Reihe 30) convergirt, sobald $m > 1$, so muss in diesem Falle auch die Reihe 25) convergiren.

Ist dagegen $k_1 < 1$, so folgt aus

$$\lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\,\alpha_1\right] = k_1$$

dass von einem gewissen $r$ an

$$\alpha_1 < \frac{\log(r+1)-\log r}{\log r} \text{ und } 1+\alpha_1 < \frac{\log(r+1)}{\log r}$$

mithin $\frac{v_{r+1}}{v_r} > \frac{1}{(1+\frac{1}{r})\cdot\frac{\log(r+1)}{\log r}}$. In der divergirenden Reihe 29) ist aber $\frac{1}{(1+\frac{1}{r})\frac{\log(r+1)}{\log r}}$ der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder, also muss die Reihe 25) divergiren.

70.

Nach dem Vorhergehenden bleibt mithin die Beschaffenheit der Reihe 25) nur dann zweifelhaft wenn $k_1 = 1$. Jedoch sieht man, dass die Reihe auch in diesem Falle divergiren muss, wenn $\frac{log\ r}{log\ (r+1) - log\ r}\ \alpha_1$ sich zwar unbegrenzt der Einheit nähert, jedoch von einem bestimmten $r$ an immer kleiner als diese Grenze bleibt, weil dann noch immer $\frac{v_{r+1}}{v_r}$ grösser als der entsprechende Quotient in der Reihe 29) ist. Es ist daher nur der Fall zu betrachten, wenn, von einem gewissen $r$ an, $\frac{log\ r}{log\ (r+1) - log\ r}\ \alpha_1$ beständig grösser als die Einheit bleibt, sich aber diesem Werthe unbegrenzt nähert. In diesem Falle kann man wieder eine Regel geben, die aber ebenfalls ihre Ausnahme hat. Bevor wir dieselbe aussprechen, wollen wir jedoch den Satz beweisen, auf welchem nicht blos diese Regel, sondern auch eine ganze Reihe Regeln, durch welche sie vervollständigt wird, beruht.

Man setze $log\ log\ p = log^2\ p$, $log\ log\ log\ p = log^3\ p$ u. s. w. Dies vorausgesetzt wird die Reihe

$$31)\qquad 1 + \frac{1}{2\ log 2\ log^2 2\ log^3 2\ \ldots\ log^{p-1} 2\ (log^p 2)^m} + \frac{1}{3\ log 3\ log^2 3\ log^3 3\ \ldots\ log^{p-1} 3\ (log^p 3)^m} + \ldots$$

c o n v e r g i r e n oder d i v e r g i r e n, je nachdem $m$ g r ö s s e r oder n i c h t g r ö s s e r als die Einheit ist.

Wir führen den Beweis dieses Satzes indem wir nachweisen, dass wenn er richtig ist, wenn man $p-1$ statt $p$ setzt, er auch für $p$ gelten muss. Die Ausdrücke $log^p 2$, $log^p 3$ u.s.w. können allerdings bis zu einer bestimmten Zahl negativ oder gar Logarithmen negativer Zahlen seyn, immer aber wird man an eine Zahl $q$ kommen für welche $log^p q$ positiv ist, und um so mehr $log^{p-1} q$, $log^{p-2} q$ u. s. w. Von da an werden folglich

alle Glieder der Reihe 31) positiv seyn, und daher werden wir auch immer die Reihe 31) erst von diesem Gliede beginnen lassen. Man wähle eine Zahl $n$ so gross, dass $log^p 2^n$ positiv ist.

Hebt man nun aus der Reihe 31) die aus $2^n$ Gliedern bestehende Gruppe

$$32) \quad \frac{1}{(2^n+1)\, log(2^n+1)\, log^2(2^n+1) \ldots [log^p(2^n+1)]^m} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}\, log\, 2^{n+1}\, log^2\, 2^{n+1} \ldots [log^p 2^{n+1}]^m}$$

heraus, so folgt aus dem in §. 68 Gesagten, dass diese Gruppe grösser ist als

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{log\, 2^{n+1}\, log^2\, 2^{n+1} \ldots [log^p 2^{n+1}]^m} \text{ d. h. grösser als}$$

$$\frac{1}{2\,(n+1)\, log\, 2\, log\,[(n+1)\, log\, 2] \ldots [log^{p-1}((n+1)\, log\, 2)]^m}$$

und insofern $log\, 2$ ein ächter positiver Bruch ist, also $2 > log\, 2$, so ist diese Gruppe um so mehr grösser als

$$\frac{1}{2\,(2n+2)\, log\,(2n+2) \ldots [log^{p-1}(2n+2)]^m}$$

Setzen wir nun allmälich in 32) für $n$ die Werthe $s$, $s+1$, $s+2$, .... und $2^s = l$ so folgt, wenn man die so erhaltene Gruppe addirt,

$$33) \quad \frac{1}{(l+1)\, log(l+1)\, log^2(l+1) \ldots [log^p(l+1)]^m} + \frac{1}{(l+2)\, log(l+2)\, log^2(l+2) \ldots + [log^p(l+2)]^m} + \ldots$$

$$> \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2s+2)\log(2s+2)\ldots.[\log^{p-1}(2s+2)]^m}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2s+4)\log(2s+4)\ldots[\log^{p-1}(2s+4)]^m}+\ldots.\right]$$

Wäre nun die letztere in Klammern stehende Reihe, oder, was dasselbe sagt, die Reihe

34) $$\frac{1}{2\log 2\log^2 2\ldots(\log^{p-1}2)^m}+\frac{1}{4\log 4\log^2 4\ldots.(\log^{p-1}4)^m}+\ldots.$$

convergent, so müsste dies um so mehr bei der Reihe

$$\frac{1}{3\log 3\log^2 3\ldots(\log^{p-1}3)^m}+\frac{+}{5\log 5\log^2 5\ldots(\log^{p-1}5)^m}+\ldots.$$

der Fall seyn, da jedes Glied der letzteren Reihe kleiner ist, als das entsprechende der vorhergehenden Reihe. Es müsste also auch, wenn man diese zwei Reihen addirt, eine convergirende Reihe entstehen. Dies wäre aber die Reihe

35) $$\frac{1}{2\log 2\log^2 2\ldots(\log^{p-1}2)^m}+\frac{1}{3\log 3\log^2 3\ldots(\log^{p-1}3)^m}+\ldots$$

welche man aus 31) erhält, indem man $p-1$ statt $p$ setzt. Ist also im Gegentheil, wenn $m \overline{\gtrless} 1$, die Reihe 35) divergent, so muss auch 34) divergent seyn, folglich auch 33) und, was dasselbe sagt, die Reihe 31).

Andererseits ist die betrachtete Gruppe kleiner als

$$\frac{2^n}{(2^n+1)\log(2^n+1)\log^2(2n+1)\ldots[\log^p(2^n+1)]^m},$$ um so mehr kleiner als $\frac{1}{\log 2^n\log^2 2^n\ldots[\log^p 2^n]^m}$ d. h. kleiner als $\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)\ldots[\log^{p-1}(n\log 2)]^m}$. Setzt man wieder für $n$ allmälich die Werthe $s$, $s+1$, ... und $2^s = l$, so folgt

33) $$\frac{1}{(l+1)\log(l+1)\log^2(l+1)\ldots[\log^p(l+1)]^m}$$
$$+\frac{1}{(l+2)\log(l+2)\log^2(l+2)\ldots[\log^p(l+2)]^m}+\ldots$$
$$<\frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{s\log(s\log 2)\ldots[\log^{p-1}(s\log 2)]^m}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(s+1)\log((s+1)\log 2)\ldots[\log^{p-1}((s+1)\log 2)]^m}+\ldots\right]$$

Bei dieser letzteren in Klammern stehenden Reihe, oder, was dasselbe sagt, bei der Reihe

36) $$\frac{1}{2\log(2\log 2)\log^2(2\log 2)\ldots[\log^{p-1}(2\log 2)]^m}$$
$$+\frac{1}{3\log(3\log 2)\log^2(3\log 2)\ldots[\log^{p-1}(3\log 2)]^m}+\ldots$$

ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{r}{r+1}\cdot\frac{\log(r\log 2)}{\log((r+1)\log 2)}\cdot\ldots\cdot\left[\frac{\log^{p-1}(r\log 2)}{\log^{p-1}((r+1)\log 2)}\right]^m$$

Dieser Ausdruck ist aber offenbar kleiner als

$$\frac{r}{r+1}\cdot\frac{\log r}{\log(r+1)}\cdot\frac{\log^2 r}{\log^2(r+1)}\cdots\cdot\left[\frac{\log^{p-1} r}{\log^{p-1}(r+1)}\right]^m$$

Denn man setze $\log r = a$; $\log\left(1+\frac{1}{r}\right) = h$, so ist $\log(r+1) = a+h$, ferner sey $\log(r\log 2) = b$ so ist $\log((r+1)\log 2) = b+h$, nun ist $\log 2$ ein ächter Bruch, also $b < a$ und $\frac{a+h}{a} < \frac{b+h}{b}$ d. h.

$$\frac{\log(r+1)}{\log r} < \frac{\log((r+1)\log 2)}{\log(r\log 2)}$$

Setzt man $\log(r+1) = g\log r$, $\log((r+1)\log 2) = g'\log(r\log 2)$,

so ist mithin $g < g'$. Zugleich sind $g$ und $g'$ grösser als die Einheit, also ihre Logarithmen positiv. Man hat aber $\log^2(r+1) = \log^2 r + \log g$; $\log^2((r+1)\log 2) = \log^2(r\log 2) + \log g'$ also

$$\frac{\log^2(r+1)}{\log^2 r} = 1 + \frac{\log g}{\log^2 r}; \quad \frac{\log^2((r+1)\log 2)}{\log^2(r\log 2)} = 1 + \frac{\log g'}{\log^2(r\log 2)}$$

nun ist $\log g < \log g'$ und $\log^2 r > \log^2 (r \log 2)$ mithin

$$\frac{\log g}{\log^2 r} < \frac{\log g'}{\log^2 (r \log 2)}$$

also auch

$$\frac{\log^2 (r+1)}{\log^2 r} < \frac{\log^2 ((r+1) \log 2)}{\log^2 (r \log 2)}$$

Fährt man auf dieselbe Weise fort, so findet man überhaupt

$$\frac{\log^h (r+1)}{\log^h r} < \frac{\log^h ((r+1) \log 2)}{\log^h (r \log 2)}$$

oder umgekehrt

$$\frac{\log^h r}{\log^h (r+1)} > \frac{\log^h (r \log 2)}{\log^h ((r+1) \log 2)}$$

Nun ist

$$\frac{r}{r+1} \cdot \frac{\log r}{\log (r+1)} \cdot \frac{\log^2 r}{\log^2 (r+1)} \cdots \left[\frac{\log^{p-1} r}{\log^{p-1} (r+1)}\right]^m$$

der Quotient der zwei aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{1}{r \log r \log^2 r \ldots (\log^{p-1} r)^m}, \quad \frac{1}{(r+1)\log(r+1)\log^2(r+1)\ldots(\log^{p-1}(r+1))^m}$$

der Reihe 35). Ist also diese Reihe convergent wenn $m > 1$, so muss auch die Reihe 36) folglich auch die Reihe 33) und mithin die Reihe 31) convergiren.

Setzt man aber in 31) für $p$ den Werth 1, so erhält man die Reihe 30) von welcher wir schon bewiesen haben, dass sie divergirt wenn $m \overline{\leqq} 1$ und convergirt wenn $m > 1$, also muss auch, unter denselben Verhältnissen, die Reihe 31) divergiren oder convergiren wenn man $p = 2$ setzt, und überhaupt wenn $p$ irgend eine ganze positive Zahl ist.

71.

Wir hatten vorausgesetzt dass $\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{(1+\frac{1}{r})(1+\alpha_1)}$

und zugleich $\lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\,\alpha_1\right] = 1$, jedoch von einem gewissen $r$ an, $\frac{\log r}{\log(r+1)-\log r}\,\alpha_1$ beständig grösser als die Einheit bleibt, also $1+\alpha_1 > \frac{\log(r+1)}{\log r}$. In diesem Falle setze man $\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{\frac{(1+\frac{1}{r})\log(r+1)}{\log r}(1+\alpha_{\prime\prime})}$; ist nun $\lim\left[\frac{\log^2 r}{\log^2(r+1)-\log^2 r}\,\alpha_{\prime\prime}\right] = k''$, so wird die Reihe 25) convergiren oder divergiren, je nachdem $k''$ um ein Angebbares grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Im ersten Falle sey $m > 1$ und zugleich $m < k''$. In der Reihe, welche man aus 31) erhält, wenn man $p = 2$ setzt, nemlich

$$37)\quad \frac{1}{2\log 2\,(\log^2 2)^m} + \frac{1}{3\log 3\,(\log^2 3)^m} + \ldots.$$

ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{1}{\frac{(1+\frac{1}{r})\log(r+1)}{\log r}\left(\frac{\log^2(r+1)}{\log^2 r}\right)^m}$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+\frac{1}{r})\log(r+1)}{\log r}\left[1+\frac{\log^2(r+1)-\log^2 r}{\log^2 r}\right]^m}$$

Insofern nun, sobald man $r$ gross genug nimmt, $\frac{\log^2(r+1)-\log^2 r}{\log^2 r} < 1$ ist, hat man $\left[1+\frac{\log^2(r+1)-\log^2 r}{\log^2 r}\right]^m$

$$= 1 + {}_m\mathfrak{B}_1 \left(\frac{\log^2 (r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}\right) + \ldots .$$

also wenn man $\left[1 + \frac{\log^2 (r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}\right]^m - 1 = h$ setzt, so folgt $\lim \left[\frac{\log^2 r}{\log^2 (r+1) - \log^2 r} h\right] = {}_m\mathfrak{B}_1 = m < k''$ und daher, von einem bestimmten $r$ an, $h < \alpha_{\prime\prime}$ mithin $\frac{v_{r+1}}{v_r}$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{r})\frac{\log (r+1)}{\log r}(1+\alpha_{\prime\prime})} < \frac{1}{(1+\frac{1}{r})\frac{\log (r+1)}{\log r}(1+h)}$$

d. h. kleiner als der entsprechende Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder in der Reihe 37). Da nun diese Reihe convergirt wenn $m > 1$ so muss auch die Reihe 25) convergiren. Ist dagegen $k'' < 1$ so muss von einem gewissen $r$ an, $\alpha_{\prime\prime} < \frac{\log^2 (r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}$ seyn, also

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} > \frac{1}{(1+\frac{1}{r})\frac{\log (r+1)}{\log r} \cdot \frac{\log^2 (r+1)}{\log^2 r}}$$

d. h. $\frac{v_{r+1}}{v_r}$ ist grösser als der Quotient der zwei aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{1}{r \log r \log^2 r}, \quad \frac{1}{(r+1) \log (r+1) \log^2 (r+1)}$$

in der divergirenden Reihe

$$1 + \frac{1}{2 \log 2 \log^2 2} + \ldots$$

die man aus 31) erhält, wenn man $p = 2$, $m = 1$ setzt, mithin muss auch die Reihe 25) divergiren.

Aus demselben Grunde muss die Reihe auch noch divergiren, wenn zwar $k'' = 1$, aber von einem bestimmten $r$ an, $\alpha_{\prime\prime} < \frac{\log^2 (r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}$ bleibt. Die bisherigen Regeln lassen also die Beschaffenheit der Reihe nur dann unbestimmt,

wenn $k'' = 1$ und zugleich $\alpha_{\prime\prime} > \frac{\log^2(r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}$. Es ist aber aus dem Vorhergehenden leicht zu sehen wie sich diese Regeln nun weiter fortsetzen lassen und es soll daher sogleich das Allgemeine ausgesprochen werden.

Man habe allmälich für $\frac{v_{r+1}}{v_r}$ die Ausdrücke $\frac{1}{1+\alpha}$,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{r}\right)(1+\alpha_1)}, \quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{\log(r+1)}{\log r}(1+\alpha_{\prime\prime})},$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{\log(r+1)}{\log r}\,\frac{\log^2(r+1)}{\log^2 r}(1+\alpha_{\prime\prime\prime})} \quad \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{\log(r+1)}{\log r}\,\frac{\log^2(r+1)}{\log^2 r}\cdots\frac{\log^{n-2}(r+1)}{\log^{n-2} r}(1+\alpha_{n-1})}$$

gesetzt, indem zugleich

$$\lim(r\alpha) = 1 \qquad \alpha > \frac{1}{r}$$

$$\lim\left[\frac{\log r}{\log(r+1) - \log r}\,\alpha_{\prime}\right] = 1 \qquad \alpha_{\prime} > \frac{\log(r+1) - \log r}{\log r}$$

$$\lim\left[\frac{\log^2 r}{\log^2(r+1) - \log^2 r}\,\alpha_{\prime\prime}\right] = 1 \qquad \alpha_{\prime\prime} > \frac{\log^2(r+1) - \log^2 r}{\log^2 r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim\left[\frac{\log^{n-1} r}{\log^{n-1}(r+1) - \log^{n-1} r}\,\alpha_{n-1}\right] = 1 \quad \alpha_{n-1} > \frac{\log^{n-1}(r+1) - \log^{n-1} r}{\log^{n-1} r}$$

so wird die Beschaffenheit der Reihe zweifelhaft seyn.

Man setze nun

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{\log(r+1)}{\log r}\,\frac{\log^2(r+1)}{\log^2 r}\cdots\frac{\log^{n-1}(r+1)}{\log^{n-1} r}(1+\alpha_n)}$$

$$\text{Ist } \lim \left[\frac{\overset{n}{\log} r}{\overset{n}{\log}(r+1) - \overset{n}{\log} r} \alpha_n\right] = k_n$$

so wird die Reihe convergiren, wenn $k_n$ um ein Angebbares grösser als die Einheit ist, sie wird dagegen divergiren, wenn entweder $k_n$ um ein Angebbares kleiner als die Einheit ist, oder wenn $k_n$ der Einheit gleich ist, jedoch zugleich von einem gewissen $r$ an, $\alpha_n < \frac{\overset{n}{\log}(r+1) - \overset{n}{\log} r}{\overset{n}{\log} r}$ bleibt. Ist dagegen $\alpha_n > \frac{\overset{n}{\log}(r+1) - \overset{n}{\log} r}{\overset{n}{\log} r}$ so bleibt die Beschaffenheit der Reihe zweifelhaft. Man sieht wie hierdurch die Bemerkung in §. 50 bestätigt wird.

## 72.

Die vorhergehenden Regeln sind besonders dann mit Nutzen anzuwenden, wenn der Quotient $\frac{v_{r+1}}{v_r}$ sich auf eine einfache Weise ausdrücken lässt. Ist dies nicht der Fall so kann die Reihe 26), auf welcher die vorhergehenden Regeln beruhen, dazu benutzt werden, andere Regeln daraus abzuleiten, deren Anwendung vorzüglich dann von Erfolg ist, wenn ein einfacher Zusammenhang zwischen dem $r$ten Gliede der Reihe und der Zahl $r$ selbst statt findet.

Man hat nemlich folgenden Satz:

Wenn in der Reihe 25) das allgemeine Glied $v_r$ so beschaffen ist, dass $v_r < \frac{1}{hr^m}$, wo $h$ irgend einen bestimmten Werth bedeutet, und es ist zugleich $m > 1$, so convergirt die Reihe, ist dagegen $v_r > \frac{1}{hr^m}$ und $m \overline{\overline{<}} 1$, so divergirt die Reihe.

Im ersten Falle hat man nemlich

$$v_r + v_{r+1} + \ldots < \frac{1}{h}\left[\frac{1}{r^m} + \frac{1}{(r+1)^m} + \ldots\right]$$

Nun convergirt die Reihe $\frac{1}{r^m} + \frac{1}{(r+1)^m} + \ldots$ sobald $m > 1$, mithin auch die Reihe $v_r + v_{r+1} + \ldots$,

Im zweiten Falle ist

$$v_r + v_{r+1} + \ldots > \frac{1}{h}\left[\frac{1}{r^m} + \frac{1}{(r+1)^m} + \ldots\right]$$

aber $\frac{1}{r^m} + \frac{1}{r^{m+1}} + \ldots$ divergirt, wenn $m \overline{\overline{<}} 1$, umsomehr die Reihe $v_r + v_{r+1} + \ldots$

Soll z. B. die Reihe

$$38) \qquad 1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} \ldots + \frac{1}{r^{\frac{r+1}{r}}} + \ldots$$

untersucht werden, so ist hier das allgemeine Glied $v_r = \frac{1}{r^{\frac{r+1}{r}}} = \frac{1}{r \,.\, r^{\frac{1}{r}}}$.

Da $r$ eine ganze positive Zahl ist, so hat man (§. 56)

$$2^r = {}^r\overset{0}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^r\overset{r}{\mathfrak{B}}$$

wobei zu bemerken, dass alle hier vorkommenden Binomialcoefficienten positive (ganze) Zahlen sind. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$2^r = 1 + r + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} + \ldots$$

so ergiebt sich daraus sofort

$$r = 2^r - \left(1 + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} + \ldots\right)$$

d. h. $\qquad r < 2^r;\ r^{\frac{1}{r}} < 2$

mithin $\qquad v_r > \frac{1}{2r}$

Setzt man also $h = 2$, $m = 1$, so ist $v_r > \frac{1}{hr^m}$, folglich divergirt die Reihe.

Bei der Reihe

39) $$\frac{3^p}{2^{m+p}} + \frac{4^p}{3^{m+p}} \cdots + \frac{r^p}{(r-1)^{m+p}} + \cdots$$

wo $m$ und $p$ positive Zahlen bedeuten, ist

$$v_r = \frac{r^p}{(r-1)^{m+p}} = \frac{1}{r^m\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{m+p}}.$$

Nun ist $\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{m+p}$ jedenfalls nicht grösser als die Einheit, mithin $v_r$ nicht kleiner als $\frac{1}{r^m}$.

Ist nun $m \leqq 1$, so ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \cdots + \frac{1}{r^m} + \cdots$$

divergent, folglich auch die Reihe 39).

Ist $m > 1$, so ist jedenfalls $\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{m+p} > \left(\frac{1}{2}\right)^{m+p}$, sobald $r > 2$ ist, mithin $v_r < \frac{1}{r^m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+p}}$.

Setzt man also $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+p} = h$ so ist $v_r < \frac{1}{hr^m}$, während $m > 1$, folglich convergirt die Reihe 39).

Man kann den vorhergehenden Satz noch in einer anderen Form ausdrücken, wenn man die Logarithmen zu Hülfe nimmt. Man setze nemlich $h = k^m$, also $k = h^{\frac{1}{m}}$ wo $k$ ebenso wie $h$ eine bestimmte positive Zahl bedeutet. Nun convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $v_r < \frac{1}{k^m r^m}$ und zugleich $m > 1$, oder $v_r > \frac{1}{k^m r^m}$ und $m \leqq 1$. Im ersten Falle ist $\frac{1}{v_r} > k^m r^m$, also $\log\frac{1}{v^r} > \log(kr)^m$ d. h. $\frac{\log\frac{1}{v^r}}{\log(kr)} > m$,

im zweiten Falle ist dagegen $\frac{\log \frac{1}{v_r}}{\log (kr)} < m.$

Setzt man nun $\lim \left[\frac{\log \frac{1}{v_r}}{\log (kr)}\right] = w$ so kann man sagen: Die Reihe 25) wird convergiren oder divergiren je nachdem $w$ um ein Angebbares grösser oder kleiner als die Einheit ist.

73.

Dieser Satz lässt die Beschaffenheit der Reihe zweifelhaft, wenn $w = 1$, d. h. wenn $v_r$ sich unbegrenzt dem Werthe $\frac{1}{hr}$ nähert. Offenbar wird jedoch auch in diesem Falle die Reihe divergiren, wenn $v_r$ beständig grösser $\frac{1}{hr}$ bleibt; ist dagegen $v_r < \frac{1}{hr}$ so kann man in ähnlicher Weise, wie es früher bei dem in §. 62 bewiesenen Satze geschah, auch hier eine Reihe ergänzender Regeln geben, die aber immer wieder einen Ausnahmefall, in welchem die Beschaffenheit der Reihe unbestimmt bleibt, übrig lassen. Auch hier dient die Eigenschaft der Reihe 31), dass sie convergirt oder divergirt, je nachdem $m$ grösser oder nicht grösser als die Einheit ist, als Grundlage.

Ist nemlich $v_r < \frac{1}{hr}$, so wird die Reihe convergiren, wenn $v_r < \frac{1}{hr\,(\log r)^m}$ und $m > 1$, sie wird divergiren, wenn $v_r > \frac{1}{hr\,(\log r)^m}$ und zugleich $m \overline{\gtrless} 1$.

Denn im ersten Falle ist $v_r + v_{r+1} + \ldots$

$$< \frac{1}{h}\left(\frac{1}{r(\log r)^m} + \frac{1}{(r+1)(\log (r+1))^m} + \ldots\right)$$

während $\frac{1}{r(\log r)^m} + \frac{1}{(r+1)(\log(r+1))^m} + \ldots$ convergirt (§. 68). Im zweiten Falle ist

$$v_r + v_{r+1} + \ldots > \frac{1}{k}\left(\frac{1}{r(\log r)^m} + \frac{1}{(r+1)(\log(r+1))^m} + \ldots\right)$$

während $\frac{1}{r(\log r)^m} + \frac{1}{(r+1)(\log(r+1))^m} + \ldots$ divergirt.

Setzt man wieder $k = h^{\frac{1}{m}}$ so kann man auch sagen, die Reihe 25) convergirt oder divergirt je nachdem, wenn

$$\lim\left[\frac{\log\frac{1}{v^r}}{\log\left(kr^{\frac{1}{m}}\log r\right)}\right] = w'$$ gesetzt wird, $w'$ um ein Angebbares grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Die Beschaffenheit der Reihe bleibt also zweifelhaft, wenn man nur weiss dass $v_r < \frac{1}{hr\log r}$ oder $w' = 1$. In diesem Falle vergleicht man $v_r$ mit $\frac{1}{r\log r(\log^2 r)^m}$ welches das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{1}{2\log 2(\log^2 2)^m} + \frac{1}{3\log 3(\log^2 3)^m} + \ldots$$

ist, und findet demgemäss, dass die Reihe 25) convergirt oder divergirt, je nachdem $v_r < \frac{1}{hr\log r(\log^2 r)^m}$ und $m > 1$, oder $v_r > \frac{1}{hr\log r(\log^2 r)^m}$ und $m \leqq 1$, oder auch wenn man

$$\lim\left[\frac{\log\frac{1}{v_r}}{\log\left(kr^{\frac{1}{m}}(\log r)^{\frac{1}{m}}\log^2 r\right)}\right] = w_2$$ setzt, je nachdem $w_2$ um ein Angebbares grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Man sieht nun wie sich diese Regeln weiter fortsetzen lassen.

74.

Man kann übrigens dieselben Regeln auch in einer anderen Form darstellen.

Es wird nemlich, wie oben bewiesen wurde, die Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem $v_r < \frac{1}{hr^m}$ und $m > 1$ oder $v_r > \frac{1}{hr^m}$ und $m \lessgtr$ d.h. je nachdem $rv_r < \frac{1}{hr^{m-1}}$ und $m-1$ positiv, oder $rv_r > \frac{1}{hr^{m-1}}$ und $m-1$ negativ.

Setzt man $h = f^{m-1}$, so folgt also, dass die Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $rv_r < (fr)^{1-m}$ und $1-m$ negativ oder $rv_r > (fr)^{1-m}$ und $1-m$ positiv. Also, wenn $\lim\left[\frac{\log(rv_r)}{\log fr}\right] = u_1$ so convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $u_1$ negativ oder positiv ist. Die Beschaffenheit der Reihe bleibt zweifelhaft wenn $u_1 = 0$.

Es wurde ferner bewiesen, dass die Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $v_r < \frac{1}{hr(\log r)^m}$ und $m > 1$, oder $v_r > \frac{1}{hr(\log r)^m}$ und $m < 1$, also mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung, je nachdem $r \log r . v_r < (f \log r)^{1-m}$ und $1-m$ negativ, oder $r \log r . v_r > (f \log r)^{1-m}$ und $1-m$ positiv. Setzt man also $\lim\left[\frac{\log(r \log r . v_r)}{\log(f \log r)}\right] = u_2$ so convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $u_2$ negativ oder positiv ist. Setzt man diese Betrachtungen fort, so sieht man dass sich die allgemeine Regel, wie folgt, aussprechen lässt:

Es sey $\lim \left[\frac{\log\,(r \log r \log^2 r \log^3 r \ldots \log^{n-1} r \,.\, v_r)}{\log\,(f \log^{n-1} r)}\right] = u_n$ *)

und zugleich $u_1 = 0$, $u_2 = 0 \ldots u_{n-1} = 0$, so wird die Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem $u_n$ negativ oder positiv ist.

Die vorhergehenden Regeln von Anfang des §. 72 an würden alle einfacher lauten, wenn man $h = 1$ setzte. Dann wäre auch $f = 1$ und die letzte allgemeine Regel lautete dann:

Wenn $\lim \left[\frac{\log\,(r \log r \log^2 r \ldots \log^{n-1} r . v_r)}{\log^n r}\right] = u_n$ **) und es ist zugleich $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ Null, so wird die Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem $u_n$ negativ oder positiv ist.

Unter dieser Voraussetzung wird aber häufig die Beschaffenheit der Reihen nicht so rasch erkannt, als bei der im Vorhergehenden angewandten Form der Regeln. Hätte man z. B. den in §. 72 bewiesenen Satz so ausgedrückt: die Reihe convergirt wenn $v_r < \frac{1}{r^m}$ und zugleich $m > 1$, divergirt wenn $v_r > \frac{1}{r^m}$ und $m \overline{\gtreqless} 1$, so hätte man vermöge desselben die Beschaffenheit der Reihe 38) nicht bestimmen können, da in diesem Falle $v_r = \frac{1}{r \,.\, r^{\frac{1}{r}}} < \frac{1}{r}$ ist.

---

*) Ist $n = 1$ so bedeutet $\log^0 r$ den Werth $r$ selbst.

**) Man darf auch noch $n = 0$ setzen. Denn da $\log^0 r = r$ so ist $u_0 = \lim \left[\frac{\log v_r}{\log^0 r}\right] = \lim \left[\frac{\log v_r}{r}\right]$ In der That folgt aber aus dem Schluss des §. 47, dass die Reihe convergirt oder divergirt je nachdem $u_0$ negativ oder positiv ist. Ist nemlich $v_r < x^r$ und zugleich $x < 1$, so ist $\frac{\log v_r}{r} < \log x$, aber, da $x < 1$, $\log x$ negativ, dann convergirt die Reihe; ist $v_r > x^r$ und $x > 1$, so ist $\frac{\log v_r}{r} > \log x$, aber, da $x > 1$, $\log x$ positiv, dann divergirt die Reihe.

75.

Man bemerke noch folgende Regel, durch welche sich häufig erkennen lässt, dass eine Reihe mit nur positiven Gliedern divergirt. Wenn das allgemeine Glied eine solche Reihe $v_r$ ist, und man setzt $lim\,(rv_r) = h$, so wird die Reihe divergiren, sobald $h$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Wäre die Reihe eine convergirende, so hätte man (§. 43)

$$lim\,(v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots + v_{2r}) = 0$$

Da aber die Glieder, insofern die Reihe convergiren soll, abnehmen müssen, so hätte man

$$v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots + v_{2r} > rv_{2r}$$

nun ist, nach der Voraussetzung, $2r \,.\, v_{2r}$ einem von Null verschiedenen Werthe gleich, also kann $rv_{2r}$ nicht Null seyn und noch weniger $lim\,(v_{r+1} + v_{r+2} \ldots + v_{2r})$.

So muss z. B. die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, deren Divergenz schon früher nachgewiesen wurde (§.45), auch deswegen divergiren, weil hier $rv_r = r \,.\, \frac{1}{r} = 1$ ist.

Man darf aber diese Regel nicht umkehren. Es kann nemlich seyn dass $lim\,(rv_r) = 0$ und die Reihe dennoch divergirt. Denn wenn auch in diesem Falle, wenn die Glieder abnehmen, $v_{r+1} + v_{r+2} \ldots + v_{2r} < rv_{r+1}$ und umsomehr $< rv_r$ ist, also der Werth dieser aus $r$ Gliedern bestehenden Gruppe sich unbegrenzt der Null nähert, so kann doch die unendliche Reihe, insofern sie aus unzählig vielen solcher Gruppen besteht, über alle Grenzen hinaus wachsen. Ein Beispiel dieser Art bietet die Reihe

$$\frac{1}{2\,log\,2} + \frac{1}{3\,log\,3} + \ldots$$

deren Divergenz früher (§. 68) bewiesen worden ist; denn hier ist $rv_r = \frac{1}{log\,r}$ was sich, mit wachsendem $r$, unbegrenzt der Null nähert.

76.

Man kann sogar noch allgemeiner beweisen, dass es überhaupt keine irgendwie aus $r$ zusammengesetzte Grösse, wir

wollen sie durch $t_r$ bezeichnen, geben kann, die so beschaffen ist, dass eine Reihe, mit nur positiven Gliedern, convergirt oder divergirt, je nachdem $lim\ [t_r\,.\,v_r] = 0$ oder $lim\ [t_r\,.\,v_r] > 0$ ist. Wäre dies nemlich der Fall, so müsste, nach dieser Voraussetzung die Reihe

$$40)\qquad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots .$$

divergiren, da hier $v_r = \frac{1}{t_r}$ und mithin $t_r\ v_r = 1$ wäre. Demnach müsste die Reihe

$$41)\ \frac{1}{t_2\,.\,\frac{1}{t_1}} + \frac{1}{t_3\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} + \ldots + \frac{1}{t_r\left[\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots \frac{1}{t_{r-1}}\right]} + \ldots$$

convergiren, da $lim\ (t_r\ v_r) = lim \left[\frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \ldots + \frac{1}{t_{r-1}}}\right]$ $= \frac{1}{\infty} = 0$ wäre.

Andererseits kann man aber beweisen dass die Reihe 41) divergiren muss, sobald die Reihe 40) divergirt.

Da $lim\ (t_r\ v_r)$ in keinem Falle negativ werden soll, so ist jedenfalls $t_r$ eine positive Grösse. Nun betrachte man eine Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r + \ldots .$$

die nur positive Glieder enthalten soll, so hat man

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{r-1})\ (1 + \frac{u_r}{u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}})$$

also auch

$$u_1 + u_2 \ldots + u_r + u_{r+1} = (u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1})$$
$$(1 + \frac{u_r}{u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}})\ (1 + \frac{u_{r+1}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_r})$$

u. s. w.

und, wenn man

$$\frac{u_r}{u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}} = k_r$$

setzt, so ist mithin

$$(1 + k_r) = \frac{u_1 + u_2 \ldots + u_r}{u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}}$$

$$(1+k_r)(1+k_{r+1}) = \frac{u_1+u_2\ldots+u_r+u_{r+1}}{u_1+u_2\ldots+u_{r-1}}$$

$$42)\quad (1+k_r)(1+k_{r+1})\ldots = \frac{u_1+u_2+\ldots u_r+u_{r+1}+\ldots}{u_1+u_2\ldots+u_{r-1}}$$

$$= 1 + \frac{u_r+u_{r+1}+\ldots.}{u_1+u_2\ldots+u_{r-1}}$$

Wenn man aber $m$ Ausdrücke von der Form $a_0 + a_1 x$; $b_0 + b_1 x$ u. s. w. mit einander multiplicirt, so hat man nach §. 23 und §. 53

$$(a_0+a_1x)(b_0+b_1x)\ldots = {}^0\overset{m}{V} + {}^1\overset{m}{V}x + \ldots + {}^r\overset{m}{V}x^r \ldots + {}^m\overset{m}{V}x^m$$

wo ${}^r\overset{m}{V}$ die Variationen der $m$ten Klasse zur Summe $r$, gebildet aus den Elementenreihen

$a_0$, $a_1$
$b_0$, $b_1$
u. s. w.

bedeutet. Die Anfangselemente jeder Reihe, welche den Index Null haben, wie $a_0$, $b_0$, ... tragen also Nichts zur Summe $r$ bei, die vielmehr nur aus den Elementen, welche den Index 1 haben, gebildet wird. Setzt man daher diese letzteren Elemente alle einander gleich, so kann man ${}^r\overset{m}{V}$ einfacher ausdrücken. Die Summe $r$ wird nemlich dann durch $r$ malige Wiederholung des Elements $a_1$ gebildet, d. h. jedes der Glieder, aus welchen ${}^r\overset{m}{V}$ besteht, enthält den Faktor $\overset{r}{a_1}$; die übrigen $m-r$ Faktoren müssen Zusammenstellungen von je $m-r$ der $m$ Elemente $a_0$, $b_0$, . . . seyn, und zwar müssen nothwendig alle Zusammenstellungen zu $m-r$, welche sich aus diesen Elementen bilden lassen, ohne dass ein Element wiederholt vorkommt, in ${}^r\overset{m}{V}$ enthalten seyn. Man erhält also ${}^r\overset{m}{V}$, indem man $\overset{r}{a_1}$ mit allen Combinationen ohne Wiederholung zur Klasse $m-r$, gebildet aus den Elementen $a_0$, $b_0$, ... multiplicirt (wobei, wie sich von selbst versteht, die in jeder Form enthaltenen Elemente durch Multiplication, und die einzelnen Formen durch Addition verbunden sind). Bezeichnet

man diese Combinationen durch $\overset{m-r}{C'}$ so ist mithin ${}^{r}\overset{m}{V} = \overset{r}{a_1}\,\overset{m-r}{C'}$ und

$$43)\quad (a_0+a_1x)(b_0+a_1x)\ldots = \overset{m}{C'} + a_1\overset{m-1}{C'}x \ldots + \overset{r}{a_1}\,\overset{m-r}{C'}x^r \ldots + \overset{m}{a_1}\,\overset{m}{x}$$

Setzt man $a_1x = 1$, so geht diese Formel in

$$44)\quad (1+a_0)(1+b_0)\ldots = 1 + \overset{1}{C'} + \overset{2}{C'} \ldots + \overset{m-r}{C'} \ldots + \overset{m-1}{C'} + \overset{m}{C'}$$

über. Man setze nun $a_0 = k_r$; $b_0 = k_{r+1}$ u.s.w. so hat man

$$45)\quad (1+k_r)(1+k_{r+1})\ldots = 1 + \overset{1}{C'} + \overset{2}{C'} + \ldots$$

wo nun $\overset{n}{C'}$ die Combinationen der $n$ten Classe ohne Wiederholung gebildet aus den Elementen $k_r$, $k_{r+1} \ldots$ bezeichnet.

Ferner ist nach §. 56

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots)^n = \Sigma A_r x^r$$

sobald $a_0 + a_1x + \ldots$, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, eine convergirende Reihe ist, wo nun $A_r = {}^r\overset{n}{C}p$ (§. 30 Form. 3) ist. Setzt man also $x = 1$ und auch wieder $a_0 = k_r$, $a_1 = k_{r+1} \ldots$ so hat man, sobald die Reihe

$$k_r + k_{r+1} + \ldots$$

deren Glieder sämmtlich positiv sind, eine convergirende ist,

$$(k_r + k_{r+1} + \ldots)^n = \Sigma\, {}^r\overset{n}{C}p$$

wo nun $k_r$ das nullte, $k_{r+1}$ das erste Element u.s.w. ist, und $\Sigma\, {}^r\overset{n}{C}p$ die Summe der sämmtlichen Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung der $n$ten Klasse aus den Elementen $k_r$, $k_{r+1} \ldots$, jede Combination mit der dazu gehörenden Permutationszahl multiplicirt, bedeutet. Nun ist offenbar

$$\Sigma\, {}^r\overset{n}{C}p > \overset{n}{C'}$$

da, bei positiven Elementen, auch wenn man die Permutationszahl unberücksichtigt lässt, schon die Summe der Combinationen mit Wiederholung einer gewissen Klasse mehr beträgt als die Summe der aus denselben Elementen gebildeten Combinationen ohne Wiederholung derselben Klasse, die erste Klasse ausgenommen, welche in beiden Fällen die Summe der Elemente ist. Demnach ist also

$$\overset{1}{C'} = k_r + k_{r+1} + \ldots$$
$$\overset{2}{C'} < (k_r + k_{r+1} + \ldots)^2$$
$$\overset{3}{C'} < (k_r + k_{r+1} + \ldots)^3$$
u. s. w.

und folglich

$$(1 + k_r)(k_{r+1}) \ldots < 1 + (k_r + k_{r+1} + \ldots) + (k_r + k_{r+1} + \ldots)^2 + (k_r + k_{r+1} + \ldots)^3 + \ldots$$

Da aber die Reihe $k_r + k_{r+1} + \ldots$ convergiren soll, so kann man $r$ immer einen so grossen, obgleich endlichen, Werth geben, dass der Werth dieser Reihe kleiner als die Einheit ist. Nennt man diesen Werth $x$, so hat man demnach

$$(1 + k_r)(1 + k_{r+1}) \ldots < 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ d.h.} < \frac{1}{1-x} \text{ (vgl. §. 47)}$$

es müsste also dieses Produkt einen endlichen Werth haben. Nach Formel 42) müsste also auch $\frac{u_r + u_{r+1} + \ldots}{u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}}$ einen endlichen Werth haben. Da nun $r$ ein endlicher Werth ist, also auch $u_1 + u_2 \ldots + u_{r-1}$ so müsste demnach die Reihe

$$u_r + u_{r+1} + \ldots$$

einen endlichen Werth haben. Ist mithin diese Reihe divergent, so muss auch das Produkt $(1 + k_r)(1 + k_{r+1}) \ldots$ über alle Grenzen wachsen und mithin kann die Reihe $k_r + k_{r+1} \ldots$ nicht convergiren.

Setzt man nun $u_r = \frac{1}{t_r}$ also $k_r = \frac{\frac{1}{t_r}}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \ldots + \frac{1}{t_{r-1}}}$

$= \frac{1}{t_r\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \ldots + \frac{1}{t_{r-1}}\right)}$ dann ist $k_1 + k_2 + \ldots$ nichts anderes als die Reihe 41) während $u_1 + u_2 + \ldots$ die Reihe 40) ist. Es ist mithin nachgewiesen, dass die Reihe 41) zugleich mit der Reihe 40) divergiren muss *).

*) Man vergleiche Note III.

Siebentes Kapitel.

## Die Exponentialgrössen mit reellen Exponenten und die reellen Logarithmen.

---

77.

Wenn $r$ eine ganze positive Zahl bedeutet, $x$ eine positive oder negative Zahl, welche, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als $r$ ist, so hat man, vermöge des binomischen Lehrsatzes,

$$(1+\frac{x}{r})^r = 1+\frac{rx}{r}+\frac{r(r-1)}{1.2}(\frac{x}{r})^2 \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots r}(\frac{x}{r})^r$$

Da aber

$$r(r-1) = r^2(1-\frac{1}{r});\ r(r-1)(r-2) = r^3(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})$$

u. s. w. so hat man auch

$$(1+\frac{x}{r})^r = 1+x+\frac{1-\frac{1}{r}}{1.2}x^2+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\ldots(1-\frac{r-1}{r})}{1.2\ldots r}x^r$$

Nun ist allerdings, wenn $k$ eine endliche Zahl ist und $r$ unbegrenzt wächst, $\lim(1-\frac{k}{r}) = 1$, mithin $\lim(1-\frac{1}{r}) = 1$, $\lim(1-\frac{2}{r}) = 1$ u. s. w. Man würde aber sehr irren, wenn man hieraus ohne Weiteres schliessen wollte, dass

$$1)\quad \lim(1+\frac{x}{r})^r = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

da in dem gefundenen Ausdrucke für $(1+\frac{x}{r})^r$ die in den einzelnen Gliedern vorkommenden Faktoren von der Form $1-\frac{k}{r}$ so beschaffen sind, dass auch $k$ mit $r$ unbegrenzt wächst, indem zuletzt sogar $1-\frac{r-1}{r}$ vorkommt. Indessen lässt sich durch eine ausführlichere Betrachtung nachweisen, dass die Gleichung 1) nichtsdestoweniger richtig ist.

Sey nemlich $n$ eine ganze positive Zahl, welche kleiner als $r$ und, abgesehen vom Zeichen, grösser als $x$ ist. Man setze

$$T = 1 + x + \frac{1-\frac{1}{r}}{1.2}x^2 \ldots + \frac{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\ldots(1-\frac{n-1}{r})}{1.2\ldots n}x^n.$$

$$R = \frac{1-\frac{n}{r}}{n+1} + \frac{(1-\frac{n}{r})(1-\frac{n+1}{r})x}{(n+1)(n+2)} \ldots + \frac{(1-\frac{n}{r})\ldots(1-\frac{r-1}{r})}{(n+1)(n+2)\ldots r}x^{r-(n+1)}$$

so ist

$$2) \qquad (1+\frac{x}{r})^r - T = \frac{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\ldots(1-\frac{n-1}{r})}{1.2\ldots n}x^{n+1}.R$$

Man lasse nun $r$ unbegrenzt wachsen, während $n$ denselben Werth behält, so wird $R$ einen endlichen Werth behalten. Von den Ausdrücken $1-\frac{n}{r}$, $1-\frac{n+1}{r}\ldots 1-\frac{r-1}{r}$ ist nemlich keiner negativ und sie sind zugleich alle kleiner als die Einheit. Nimmt man nun zuerst $x$ positiv, so besteht $R$ nur aus positiven Gliedern und man hat daher

$$R < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}x + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots r}x^{r-n-1}$$

Lässt man aber $r$ unbegrenzt wachsen, so convergirt die unendliche Reihe

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}x + \ldots$$

da der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $\frac{x^{k-1}}{(n+1)\ldots(n+k)}$ und $\frac{x^k}{(n+1)\ldots(n+k+1)}$ den Werth $\frac{x}{n+k+1}$ hat, welcher kleiner als die Einheit ist, da $x < n$. Mithin behält $R$ einen endlichen positiven Werth. Ist $x$ negativ, so sind in dem Werthe von $R$ die Glieder abwechselnd positiv, um so mehr muss also $R$ auch in diesem Falle einen endlichen Werth behalten.

Dieses Verhältniss bleibt dasselbe, wenn man nun auch $n$ unbegrenzt wachsen lässt, sobald nur $x < r$. Unter dieser Voraussetzung wird aber der Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n}$ sich unbegrenzt der Null nähern. Denn da $x$ eine bestimmte Zahl ist, welche kleiner als $n$ seyn soll, so wird sich in der Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis $n$ eine Zahl $p$ finden, welche grösser als $x$ ist. Nun ist

$$\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{x^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p} \cdot \frac{x^{n-p}}{(p+1)\ldots n}$$

Der Ausdruck $\frac{x^{p+1}}{1\ldots p}$ hat einen bestimmten endlichen Werth.

Der Ausdruck $\frac{x^{n-p}}{(p+1)\ldots n} = \frac{x^{n-p}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-p)}$ ist (ohne Rücksicht auf das Zeichen von $x$) kleiner als $\left(\frac{x}{p+1}\right)^{n-p}$.

Da nun $\frac{x}{p+1}$ ein ächter Bruch seyn soll, so sinkt $\left(\frac{x}{p+1}\right)^{n-p}$ mit wachsendem $n$ unter jede angebbare Grösse, also auch $\frac{x^{n-p}}{(p+1)\ldots n}$ und mithin auch das Produkt aus diesem letzteren Ausdrucke und dem bestimmten Werthe $\frac{x^{p+1}}{1\ldots p}$. D. h. wenn $n$ unbegrenzt wächst, so ist $\lim \frac{x^{n+1}}{1\ldots n} = 0$; hieraus folgt weiter, dass unter denselben Voraussetzungen auch

$$\lim \left[\frac{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\ldots(1-\frac{n-1}{r})}{1 \cdot 2 \ldots n} x^{n+1} R\right] = 0$$

da das Produkt $(1-\frac{1}{r})\ldots(1-\frac{n-1}{r})$ aus positiven Faktoren besteht, die sämmtlich kleiner als die Einheit sind, also nur einen endlichen Werth haben kann, welcher kleiner als die Einheit ist, ebenso $R$, wie bewiesen wurde, einen end-

lichen Werth hat, und $\lim \frac{x^{n+1}}{1 \ldots n} = 0$ ist. Aus der Formel 2) folgt demnach:

$$3) \quad \lim \left(1+\frac{x}{r}\right)^r = \lim T = \lim \left[1+x+\frac{1-\frac{1}{r}}{1 \cdot 2}x^2 \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\left(1-\frac{1}{r}\right) \ldots \left(1-\frac{n-1}{r}\right)}{1 \ldots n} x^n \right]$$

Nun wurde soeben bemerkt, dass

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right) \ldots \left(1-\frac{n-1}{r}\right) < 1.$$

Bezeichnet aber $\alpha$ irgend eine beliebig kleine Zahl, so kann man andererseits das aus $n-1$ Faktoren bestehende Produkt $\left(1-\frac{1}{r}\right) \ldots \left(1-\frac{n-1}{r}\right)$ auch immer grösser als $1-\alpha$ machen. Denn jedenfalls ist dies Produkt grösser als $\left(1-\frac{n-1}{r}\right)^{n-1}$. Man setze daher $\left(1-\frac{n-1}{r}\right)^{n-1} > 1-\alpha$ d. h. $r > \frac{n-1}{1-\sqrt[n-1]{1-\alpha}}$, dann ist auch das Produkt $> 1-\alpha$. Um so mehr sind die Ausdrücke $1-\frac{1}{r}$, $\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)$ u. s. w. grösser als $1-\alpha$.

Ist nun $x$ positiv, so ist offenbar, wenn $r$ hinlänglich gross genommen wird,

$$T > 1+x+(1-\alpha)\left[\frac{x^2}{1 \cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\right].$$

Die Reihe $\frac{x^2}{1 \cdot 2}+\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ behält aber, auch wenn $n$ unbegrenzt wächst, einen endlichen Werth, da der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $\frac{x^s}{1 \cdot 2 \ldots s}$ und $\frac{x^{s+1}}{1 \cdot 2 \ldots (s+1)}$ den Werth $\frac{x}{s+1}$ hat, welcher $< 1$

ist, sobald $s+1>x$. Bezeichnet man daher für jedes $n$ den Werth dieser Reihe durch $W_n$ so hat man.

$$T>1+x+\frac{x^2}{1.2}\dots+\frac{x^n}{1\dots n}-\alpha W_n$$

Zugleich hat man aber auch

$$T<1+x+\frac{x^2}{1.2}\dots+\frac{x^n}{1\dots n}$$

Die zwei Grenzen zwischen welchen $T$ eingeschlossen ist, sind also nur um $\alpha W_n$ verschieden, d. h. um eine Grösse, welche unter jeden angebbaren Werth sinkt, da sie das Produkt aus einem endlichen Werthe $W_n$ und dem Werthe $\alpha$ ist, welchen man mit wachsendem $r$ unter jede angebbare Grösse sinken lassen kann. Mithin ist

$$lim\ (1+\frac{x}{r})^r = lim\ T = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\dots+\frac{x^k}{1.2\dots k}+\dots.$$

Man setze jetzt $-x$ statt $x$, indem man noch immer $x$ positiv nimmt. Dann hat man nach Form. 3)

$$lim\ (1-\frac{x}{r})^r = lim\ T = lim\ (1-x+\frac{1-\frac{1}{r}}{1.2}x^2\dots.$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{r})\dots.(1-\frac{n-1}{r})}{1\dots n}x^n)$$

Nun ist klar, dass dieser Werth von $T$ kleiner ist als wenn man alle positiven Glieder vergrössert und alle negativen verkleinert. Man bestimme $\alpha$ wie vorher, und nehme, um einen bestimmten Fall zu haben, an, das letzte Glied im Werthe von $T$ sey negativ, so ist offenbar

$$T<1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\dots+\frac{x^{n-1}}{1.2..n-1}-(1-\alpha)\left[x+\frac{x^3}{1.2.3}\dots+\frac{x^n}{1.2..n}\right]$$

Nach einer im Vorhergehenden wiederholt gebrauchten Betrachtung ist klar, dass die Reihe $x+\frac{x^3}{1.2.3}\dots$ einen endlichen Werth behält, auch wenn man $n$ unbegrenzt wachsen lässt.

Man bezeichne daher den jedesmaligen Werth dieser Reihe durch $W'$, so ist

$$T < 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} \ldots - \frac{x^n}{1.2..n} - \alpha W'$$

Dagegen ist $T$ grösser als der Werth, welchen man erhält, wenn man alle positiven Glieder verkleinert und alle negativen vergrössert, also

$$T > (1-\alpha)\left[1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2..(n-1)}\right]$$
$$- \left[x + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2..n}\right]$$

Da aber auch die Reihe $1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$ einen endlichen Werth behält wenn man $n$ unbegrenzt wachsen lässt, so bezeichne man den jedesmaligen Werth dieser Reihe durch $W''$, also ist

$$T > 1 - x + \frac{x^2}{1.2} \ldots - \frac{x^n}{1.2..n} - \alpha W''$$

Der Unterschied der zwei Grenzen, zwischen welchen $T$ eingeschlossen ist, heisst also $\alpha(W'' - W')$ und ist folglich ein mit $\alpha$ unter jede angebbare Grenze sinkender Werth. Mithin

$$lim(1 - \frac{x}{r})^r = lim\, T = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} \ldots + (-1)^k . \frac{x^k}{1.2..k} + \ldots.$$

Man hätte offenbar dasselbe erhalten, wenn man das letzte Glied im Werthe von $T$ positiv genommen hätte. Man hat demnach jetzt das allgemeine Resultat, dass, wenn $x$ irgend welche positive oder negative endliche Zahl, und $r$ eine ganze positive Zahl bedeutet,

4) $$lim\,(1 + \frac{x}{r})^r = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^k}{1.2\ldots k} + \ldots$$

ist.

78.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass diese Gleichung auch dann noch ihre Geltung behält, wenn $r$ irgend eine reelle, rationale oder irrationale Zahl bedeutet.

Ist nemlich $r$ eine nicht ganze aber reelle positive Zahl, so wird sie zwischen zwei ganzen positiven Zahlen liegen, welche $p$ und $p+1$ heissen sollen. Man hat also, wenn $x$ positiv,

$$(1+\frac{x}{r})^r < (1+\frac{x}{p})^{p+1} \; ; \; (1+\frac{x}{r})^r > (1+\frac{x}{p+1})^p$$

und wenn $x$ negativ,

$$(1+\frac{x}{r})^r > (1+\frac{x}{p})^{p+1} \; ; \; (1+\frac{x}{r})^r < (1+\frac{x}{p+1})^p$$

Jedenfalls liegt also $(1+\frac{x}{r})^r$ zwischen den Grenzen $(1+\frac{x}{p})^{p+1}$ und $(1+\frac{x}{p+1})^p$ d. h. zwischen $(1+\frac{x}{p})^p(1+\frac{x}{p})$ und $\dfrac{(1+\frac{x}{p+1})^{p+1}}{1+\frac{x}{p+1}}$. Da nun mit wachsendem $r$ und also auch wachsendem $p$, sowohl $1+\frac{x}{p}$ als $1+\frac{x}{p+1}$ sich unbegrenzt der Einheit nähert, während $lim(1+\frac{x}{p})^p = lim(1+\frac{x}{p+1})^{p+1}$ $= 1 + x + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \ldots$ ist, so ist mithin auch $lim(1+\frac{x}{r})^r$ $= 1 + x + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \ldots$ *).

Setzt man $-r$ statt $r$ indem man $r$ noch immer positiv nimmt, so hat man $(1-\frac{x}{r})^{-r} = (\frac{r-x}{r})^{-r} = (\frac{r}{r-x})^r = (1+\frac{x}{r-x})^r$ $= (1+\frac{x}{r-x})^{r-x}(1+\frac{x}{r-x})^x$.

*) Wenn zwei Ausdrücke $A$ und $B$, welche $p$ enthalten, bei unbegrenzt wachsendem $p$, in $a$ und $b$ übergehen, also $lim\ A = a$, $lim\ B = b$, so ist auch $lim\ (AB) = ab$. Denn setzt man $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, so müssen $\alpha$ und $\beta$, mit unbegrenzt wachsendem $p$, unter jeden angebbaren Werth sinken. Nun ist $AB = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta$. Also da $lim\ (\alpha b + \beta a + \alpha\beta) = 0$ so ist auch $lim\ AB = ab$.

Nun ist $\lim\left(1+\frac{x}{r-x}\right)^x = 1$, also $\lim\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-r} = \lim\left(1+\frac{x}{r-x}\right)^{r-x}$

aber, da $r-x$ eine positive Zahl ist, $\lim\left(1+\frac{x}{r-x}\right)^{r-x}$

$= 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots$

Es ist demnach erwiesen, dass die Formel 4) für jeden reellen Werth von $x$ und für jeden reellen Werth von $r$ gültig ist.

79.

Setzt man $x = 1$ so erhält man

$$\lim\left(1+\frac{1}{r}\right)^r = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

Man pflegt den für die Analysis äusserst wichtigen Werth dieser convergirenden Reihe durch den Buchstaben $e$ zu bezeichnen, also

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

Die Wichtigkeit dieses Werthes beruht zunächst auf dem Zusammenhange zwischen $\lim\left(1+\frac{1}{r}\right)^r$ und $\lim\left(1+\frac{x}{r}\right)^r$. Setzt man nemlich $\left(1+\frac{x}{r}\right)^r = \left[1+\frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)}\right]^{\frac{r}{x}\,.\,x} = \left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)}\right)^{\frac{r}{x}}\right]^x$

so ist, nach dem Vorhergehenden, $\lim\left(1+\frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)}\right)^{\frac{r}{x}} = e$ also

$$\lim\left(1+\frac{x}{r}\right)^r = e^x \; *)$$

---

*) Setzt man nemlich $\left(1+\frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)}\right)^{\frac{r}{x}} = e + \alpha$, so muss $\alpha$ mit wachsendem $r$ unter jede angebbare Grösse sinken, nun ist $\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)}\right)^{\frac{r}{x}}\right]^x$ $= (e+\alpha)^x = (e^x\left(1+\frac{\alpha}{e}\right)^x$ also $\lim\left(1+\frac{\alpha}{e}\right)^x = 1$ und $\lim(e+\alpha)^x = e^x$.

und mithin, nach Form. 4)

$$5)\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots .$$

Nimmt man nun $e$ als Basis eines Potenzensystems, und setzt $e^x = A$, so ist $x$ der Logarithm von $A$ in diesem Systeme, und man findet, vermittelst der Formel 5), zu jedem gegebenen Logarithmen die entsprechende Zahl durch eine convergirende Reihe ausgedrückt. Diese Reihe nennt man die Exponentialreihe und $e^x$ eine Exponentialgrösse, insofern jede unter der Form einer Potenz ausgedrückte Zahl eine Exponentialgrösse genannt wird, sobald man voraussetzt, dass die Basis dieselbe bleiben soll, der Exponent aber verschiedene Werthe annehmen kann.

Im Folgenden soll das Potenzensystem, dessen Basis $e$ ist, das natürliche heissen, wie man es jetzt gewöhnlich nennt; früher nannte man es auch das hyperbolische, wegen seines eigenthümlichen Zusammenhanges mit der Hyperbel, welcher hier nicht erläutert werden kann.

Die Logarithmen in diesem Systeme nennt man entsprechend die natürlichen (hyperbolischen) *). Im Folgenden sollen diese Logarithmen ausschliesslich durch das Zeichen *log.* angedeutet werden, während Logarithmen, die zu einem Potenzensysteme mit der Basis $a$ gehören, durch ${}^a log$ bezeichnet werden sollen. Sagen wir also z. B. $log\ k = h$, so verstehen wir darunter, dass $k = e^h = 1 + h + \frac{h^2}{1\,.\,2} + \ldots$

Auch soll, wo von einem Logarithmen die Rede ist, hierunter nur der natürliche Logarithme verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

80.

Dass man den Werth der Zahl $e$ mit jedem beliebigen Grade

*) In Frankreich pflegt man sie jetzt Neper'sche Logarithmen (logarithmes nepériens) zu nennen, nach dem englischen Mathematiker Napier (Neper), welcher zuerst Logarithmentafeln berechnet hat. Indessen stimmen die Neperschen Logarithmen nicht vollkommen mit den natürlichen überein; man findet hierüber mehr in Biot's Mélanges scientifiques et littéraires T. 2 p. 422, auch Journal des savans 1835 p. 354 ff.

von Genauigkeit annähernd berechnen kann, ist klar, da dieser Werth nach Form. 5) durch eine convergirende Reihe ausgedrückt wird. Da aber eine convergirende Reihe auch einen rationalen Werth haben kann *), so entsteht die Frage, ob dies nicht auch bei dem Werthe von $e$ der Fall ist, so dass dieser Werth nicht blos näherungsweise, sondern genau in rationalen Zahlen angegeben werden könnte. Es lässt sich aber beweisen, dass der Werth von $e$ nicht rational seyn kann. Wäre nemlich $e = \frac{p}{q}$, wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen bedeuten sollen, so hätte man

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots q} + \frac{1}{1.2\ldots q(q+1)} + \ldots$$

Man multiplicire auf beiden Seiten mit dem Produkte aller ganzen Zahlen von 1 bis $q$, so hat man

$$1.2\ldots q.\frac{p}{q} = 1.2\ldots(q-1).p = 1.2\ldots q\left[2 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots q}\right]$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

Nun ist $1.2\ldots(q-1)p$ eine ganze Zahl, und $1.2\ldots q \left[2 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots q}\right]$ ebenfalls eine ganze Zahl, da die Nenner $1.2$, $1.2.3$, ... sämmtlich in $1.2\ldots q$ aufgehen. Die Differenz dieser zwei ganzen Zahlen sey die ganze Zahl $G$, welche nicht Null seyn kann, da

$$G = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

Ferner ist

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

aber (§. 47)

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots = \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

*) So wie z. B. 2 der Werth der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$ ist (§. 42).

Man hätte demnach $G < \frac{1}{q}$, d. h. eine positive ganze Zahl müsste kleiner seyn als ein ächter Bruch. Da dies unmöglich ist, so muss also $e$ eine irrationale Zahl seyn und es bleibt demnach nichts übrig, als dessen Werth, so genau als es nöthig scheint, aus der unendlichen Reihe zu berechnen *).

81.

Um aber zu wissen, mit welcher Genauigkeit man sich einem durch eine convergirende Reihe ausgedrückten Werthe genähert hat, wenn man statt der ganzen Reihe nur eine Anzahl der ersten Glieder berechnet, muss man im Stande seyn eine Fehlergrenze anzugeben, d. h. einen Werth, welcher grösser ist, als der Werth der vernachlässigten Glieder. Bei der Reihe, welche $e^x$ ausdrückt, ist eine solche Fehlergrenze leicht zu bestimmen. Man habe z. B.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot n}$$

gesetzt, wo $x$ positiv seyn soll, man setze den Werth der vernachlässigten Glieder $= R$, also

$$R = \frac{x^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} + \frac{x^{n+2}}{1 \ldots (n+2)} + \ldots$$

$$= \frac{x^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} \left[1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right]$$

Ist nun $x < n + 2$ so ist

$$1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x}{(n+2)(n+3)} + \ldots < 1 + \frac{x}{n+2} + \left(\frac{x}{n+2}\right)^2 + \ldots$$

also $< \frac{1}{1 - \frac{x}{n+2}}$

mithin $R < \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n+2}}$

*) Vgl. Note IV.

Sobald also die Glieder der Reihe soweit zur Berechnung herangezogen werden, dass die Bedingung $x < n + 2$ erfüllt ist, drückt $\frac{x^{n+1}}{1.2..(n+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}$ einen Werth aus, der mehr beträgt als der Werth der vernachlässigten Glieder, also eine Fehlergrenze.

Setzt man $x = 1$ und näherungsweise

$$e = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}$$

so ist diese Fehlergrenze

$$= \frac{1}{1\ldots(n+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{1.2..n} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

Hat man z. B. näherungsweise

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$

also $n = 6$ gesetzt, so findet man hieraus

$$e = 2{,}718055\ldots$$

man weiss daher, dass $e$ grösser als diese Zahl ist. Die Fehlergrenze ist $\frac{1}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{8}{49} = 0{,}00022\ldots$ Der Werth der vernachlässigten Glieder ist also jedenfalls kleiner als 0,00023 und mithin

$$e > 2{,}718055\ldots$$
$$< 2{,}718285\ldots$$

man weiss also mit Sicherheit, dass der Werth von $e$ mit den Ziffern 2,718 beginnt, d. h. indem man ausser dem Anfangsgliede noch 6 Glieder der Reihe benutzt hat, konnte man den Werth von $e$ bis auf die dritte Decimalstelle mit Sicherheit berechnen. Geht man auf diese Weise fort, so kann man die Zahl $e$ bis zu jeder beliebigen Decimalstelle genau bestimmen. Bis auf 10 Decimalstellen genau heisst sie

$$e = 2{,}7182818284$$

82.

Welche reelle Zahl man für $x$ setzen mag, immer hat $e^x$

einen positiven Werth. Denn ist $x$ positiv, so folgt unmittelbar aus der Formel 5) dass auch $e^x$ positiv ist. Setzt man aber $-x$ statt $x$ so ist $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ also ebenfalls positiv. Das natürliche Potenzensystem (mit reellen Exponenten) enthält also nur positive Zahlen; negative Zahlen haben mithin keinen (reellen) natürlichen Logarithmen. Ist $x$ ein Bruch mit geradem Nenner, etwa $x = \frac{p}{2q}$, so kann daher $e^x = e^{\frac{p}{2q}}$ nur dem positiven Werthe $\sqrt[2q]{e^p}$ gleich seyn. Je grösser $x$ ist, desto grösser ist auch $e^x$. Ist nemlich $a$ eine positive Zahl, so ist

$$e^{x+a} = e^x \cdot e^a = e^x \left(1 + a + \frac{a^2}{1.2} + \ldots\right)$$

also

$$e^{x+a} > e^x$$

Den grösseren Zahlen entsprechen demnach grössere Logarithmen und umgekehrt. Jede Zahl hat also nur einen einzigen Logarithmen.

Ist $x$ positiv, so ist $e^x > 1$, folglich $e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1$, d. h. die Zahlen sind grösser oder kleiner als die Einheit, je nachdem ihr Logarithme positiv oder negativ ist. Die Einheit selbst hat den Logarithmen Null, da $e^0 = 1$.

## 83.

Von dem natürlichen Potenzensysteme kann man leicht zu jedem anderen übergehen, dessen Basis $A$ eine positive Zahl ist. D. h. man kann, wenn man eine solche Basis $A$ wählt, auch $A^x$ durch eine nach steigenden Potenzen von $x$ fortschreitende convergirende Reihe ausdrücken. Setzt man nemlich $A = e^a$, so ist $A^x = e^{ax}$ *) und mithin

*) Ist $x = \frac{p}{2q}$ so kann unter $A^{\frac{p}{2q}}$ nur der positive Werth $\sqrt[2q]{A^p}$ verstanden werden, da $e^{ax}$ immer positiv ist.

$$A^x = e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2\, x^2}{1\,.\,2} + \frac{a^3\, x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

nun ist $a = log\, A$ also

$$6)\quad A^x = 1 + log\, A\,.\,x + \frac{(log\, A)^2}{1\,.\,2}\, x^2 + \frac{(log\, A)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, x^3 + \ldots.$$

Welches nun der Werth von $A$ sey, so ist $log\, A$ niemals die Einheit, sobald $A$ eine andere Zahl als $e$ ist. Das natürliche Potenzensystem verdient daher seinen Namen insofern mit Recht, als es am natürlichsten ist, diejenige Zahl als Basis zu wählen, für welche die Berechnung der Potenzen am einfachsten ausfällt.

Setzt man $A = 1 + b$ so folgt aus 6)

$$7)\quad (1+b)^x = 1 + log\,(1+b)\,.\,x + \frac{[log\,(1+b)]^2}{1\,.\,2}\, x^2 + \ldots.$$

Ist aber der Zahlenwerth von $b$ kleiner als die Einheit, so hat man auch (§. 57 u. 65)

$$8)\quad (1+b)^x = 1 + x\,.\,b + \frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}\, b^2 + \ldots$$

so dass man für solche Werthe von $b$ zwei verschiedene Entwickelungen von $(1+b)^x$ hat. Aus 7) folgt

$$\frac{(1+b)^x - 1}{x} = log\,(1+b) + \frac{[log\,(1+b)]^2}{1\,.\,2}\, x + \frac{[log\,(1+b)]^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, x^2 + \ldots$$

Da nun $\frac{[log\,(1+b)]^2}{1\,.\,2}\, x + \frac{[log\,(1+b)]^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, x^2 + \ldots$ für jeden Werth von $x$ eine convergirende Reihe ist, also Null wird, wenn man den allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $x=0$ setzt, so hat man, wenn man $x$ unbegrenzt abnehmen lässt,

$$9)\quad lim\, \frac{(1+b)^x - 1}{x} = log\,(1+b)$$

indem man durch $lim\, \frac{(1+b)^x - 1}{x}$ den Werth bezeichnet, welchem sich $\frac{(1+b)^x - 1}{x}$ unbegrenzt nähert, wenn man $x$ unbegrenzt abnehmen lässt. Andererseits folgt aber aus 8)

$$10) \quad \frac{(1+b)^x-1}{x} = b + \frac{x-1}{1\,.\,2}b^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}b^3 + \ldots$$

$$= b - \frac{1-x}{1\,.\,2}b^2 + \frac{(1-x)(2-x)}{1\,.\,2\,.\,3}b^3 \ldots \pm \frac{(1-x)(2-x)\ldots(k-x)}{1\,.\,2\ldots(k+1)}b^{k+1} \mp \ldots$$

wo das obere oder untere Zeichen im allgemeinen Gliede zu nehmen ist, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist. Setzt man $x = 0$ so folgt hieraus

$$11) \quad \lim \frac{(1+b)^x-1}{x} = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \ldots \pm \frac{b^{k+1}}{k+1} \mp \ldots$$

und aus dem Vergleich von 9) und 11)

$$12) \quad \log\,(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \ldots \pm \frac{b^{k+1}}{k+1} \mp \ldots$$

$$= \sum_{1,\infty}^{r} (-1)^r \frac{b^r}{r}$$

Da $b$ zwischen $-1$ und $+1$ enthalten seyn muss, so zeigt diese Formel, wie man für alle Zahlen, die zwischen 0 und 2 liegen, den Logarithmen berechnen kann. Sie gilt auch noch für $b = 1$, wie die Formel 8), nach §. 63, dagegen gilt sie nicht mehr für $b = -1$ und für Zahlenwerthe von $b$ die grösser als die Einheit sind, in welchen Fällen die Reihe $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots$ in der That divergirt *).

84.

Scheint demnach die Anwendung dieser Formel sehr beschränkt zu seyn, so findet man doch leicht, dass sich mit Hülfe derselben die Logarithmen aller ganzen Zahlen und mithin auch aller Brüche berechnen lassen. Setzt man nemlich $b = \frac{1}{m}$, und $m > 1$, so findet man daraus:

---

*) Da $1 + b = e^{\log\,(1+b)}$ also $e = (1+b)^{\frac{1}{\log\,(1+b)}}$ so ist $e = (1+b)^{\frac{1}{b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \ldots}}$ sobald $b$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt.

13) $log(1+\frac{1}{m}) = log(m+1) - log\, m = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} - \ldots$
sobald man also *log m* kennt, kann man *log* $(m+1)$ finden. Da nun *log* 2 aus 12) berechnet werden kann, so findet man daraus wieder *log* 3 u. s. w.

Setzt man näherungsweise

$$log\,(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots - \frac{b^{2r}}{2r}$$

so ist es leicht eine Fehlergrenze (§. 81) anzugeben. Denn sey *b* positiv; in dem vernachlässigten Theile der Reihe für *log* $(1+b)$, welcher *R* heissen mag, ist jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende, und die Glieder nehmen unbegrenzt ab. Man hat also

$$R = \frac{b^{2r+1}}{2r+1} - \frac{b^{2r+2}}{2r+2} + \frac{b^{2r+3}}{2r+3} \ldots = \frac{b^{2r+1}}{2r+1} - \left(\frac{b^{2r+2}}{2r+2} - \frac{b^{2r+3}}{2r+3}\right) - \ldots$$

Hieraus folgt, wenn man die Betrachtungen des §. 59 wiederholt,

$$R < \frac{b^{2r+1}}{2r+1}$$

und man kann mithin $\frac{b^{2r+1}}{2r+1}$ als Fehlergrenze nehmen. Setzt man z. B. $b = 1$, so erhält man *log* 2 aus den $2r$ ersten Gliedern der Reihe bis auf mehr als $\frac{1}{2r+1}$ genau. Nimmt man etwa $r = 5$ und setzt *log* $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$ so weiss man, dass der aus diesen zehn Gliedern berechnete Werth bis auf mehr als $\frac{1}{11} = 0{,}0909 \ldots$ genau ist. In der That findet sich hieraus *log* $2 = 0{,}6456 \ldots$ während in Wahrheit *log* $2 = 0{,}69314 \ldots$ also der Unterschied $0{,}047 \ldots$ ist. Andererseits folgt aus derselben Betrachtung

$$R > \frac{b^{2r+1}}{2r+1} - \frac{b^{2r+2}}{2r+2}$$

also, wenn $b = 1$, $R > \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+2}$ mithin, bei $r = 5$, $R > \frac{1}{11 . 12}$ d. h. $R > 0{,}007$.

Setzt man $-b$ statt $b$ so hat man

$$log(1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \dots = -[b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4} \dots]$$

setzt man näherungsweise

$$log\ (1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} \dots - \frac{b^{2r}}{2r}$$

und nennt die Summe der vernachlässigten Glieder wieder $R$, so ist

$$R = -\left[\frac{b^{2r+1}}{2r+1} + \frac{b^{2r+2}}{2r+2} + \dots\right]$$

Nun ist

$$\frac{b^{2r+1}}{2r+1} + \frac{b^{2r+2}}{2r+2} + \dots < \frac{1}{2r+1}(b^{2r+1} + b^{2r+2} + \dots)$$

$$\text{d. h.} < \frac{b^{2r+1}}{2r+1} \cdot \frac{1}{1-b}$$

mithin, ohne Rücksicht auf das Zeichen, $R < \frac{b^{2r+1}}{2r+1} \cdot \frac{1}{1-b}$.

Man sieht dass die Fehlergrenze grösser als im vorhergehenden Falle ist, da $\frac{1}{1-b} > 1$.

Setzt man $b = \frac{1}{2}$ und $r = 5$, so findet man näherungsweise

$$log(1 - \frac{1}{2}) = log\frac{1}{2} = -log 2 = -\left[\frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2^2})}{2} + \frac{(\frac{1}{2^3})}{3} \dots + \frac{(\frac{1}{2^{10}})}{10}\right]$$

und hieraus $log\ 2 = 0{,}69306 \dots$ also bis zur dritten Decimalstelle genau.

Setzt man $b = \frac{1}{m}$ so findet man

14) $log(1 - \frac{1}{m}) = log(m-1) - log m = -\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \dots$

Subtrahirt man diesen Ausdruck von dem oben gefundenen

$$\log(m+1)-\log m=\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}-\ldots$$

so erhält man

15) $$\log(m+1)-\log(m-1)=\log\left(\frac{m+1}{m-1}\right)=2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{3m^3}+\frac{1}{5m^5}+\ldots\right)$$

Diese Formel ist zur Berechnung der Logarithmen sehr brauchbar. Durch $\frac{m+1}{m-1}$ kann man nemlich jede ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl ausdrücken. Ist $m$ positiv, so ist $\frac{m+1}{m-1}>1$, ist $m$ negativ $=-m'$, so ist, da $m'>1$, auch $\frac{m+1}{m-1}=\frac{1-m'}{-(1+m')}=\frac{m'-1}{m'+1}$ eine positive Zahl welche $<1$ ist. Setzt man daher $\frac{m+1}{m-1}=n$, so folgt $m=\frac{n+1}{n-1}$ und mithin

16) $$\log n=2\left[\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3\ldots+\frac{1}{2r+1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+1}+\ldots\right]$$

Setzt man näherungsweise

$$\log n=2\left[\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3\ldots+\frac{1}{2r+1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+1}\right]$$

so ist der vernachlässigte Theil der Reihe

$$R=2\left[\frac{1}{2r+3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+3}+\frac{1}{2r+5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+5}+\frac{1}{2r+7}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+7}+\ldots\right]$$

also

$$R<\frac{2}{2r+3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+3}\left[1+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^4+\ldots\right]$$

Setzt man $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2=x$, so ist

$$1+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^4+\ldots=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2}$$

und $$R<\frac{2}{2r+3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+3}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2}$$

oder $R < \frac{1}{2r+3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2r+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{2n}$

Ist z. B. $n=2$, $r=3$, so dass man näherungsweise

$$log\,2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right]$$

setzt, so findet man bis zur 7ten Decimalstelle, $log\,2 = 0{,}6931347$ und zugleich $R < \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{4}$ d. h. $R < 0{,}0000127$. In der That ist der wahre Werth von $log$ 2 bis zur 7ten Decimalstelle $= 0{,}6931471$ also um $0{,}0000124$ grösser als der berechnete. Man hat also vermittelst 4 Glieder der Reihe 16) den Werth von $log\,2$ bis zur 4ten Decimalstelle genau erhalten.

Setzt man $\frac{m+1}{m-1} = \frac{p}{q}$ also $m = \frac{p+q}{p-q}$ so folgt aus 16)

$$log\frac{p}{q} = 2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\ldots\right] = log\,p - log\,q$$

also

$$log\,p = log\,q + 2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\ldots\right]$$

Diese Formel kann man also benutzen um aus dem bekannten Werthe von $log\,q$ den Werth von $log\,p$ zu finden. Die in dieser Formel enthaltene Reihe wird um so rascher convergiren und daher die Formel um so brauchbarer seyn, je kleiner der Unterschied von $p$ und $q$ und je grösser jede dieser Zahlen ist. Setzt man nemlich $p = q + d$ so geht die Formel in

$$log(q+d) = log\,q + 2\left[\frac{d}{2q+d}+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{2q+d}\right)^3+\left(\frac{d}{2q+d}\right)^5+\ldots\right]$$

über und hier convergirt die Reihe desto stärker, je kleiner $d$ und je grösser $q$ ist.

85.

Bekanntlich braucht man nur die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen, da man, wenn diese bekannt sind, daraus die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen finden kann. In dieser Beziehung ist noch folgende Formel bemerkenswerth. Addirt man die Formeln 13) und 14) so findet man

$$2 \log m - \log(m-1) - \log(m+1) = 2\left[\frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4m^4} + \ldots + \frac{1}{2r.m^{2r}} + \ldots\right]$$

also

$$17) \quad \log m = \frac{\log(m-1) + \log(m+1)}{2} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4m^4} \ldots + \frac{1}{2r.m^{2r}} + \ldots$$

Ist nun $m$ eine Primzahl, die Zahl 2 ausgenommen, so kann weder $m-1$ noch $m+1$ eine solche seyn, da sie gerade Zahlen sind. Setzt man also voraus, dass die Logarithmen aller Primzahlen, welche kleiner als $m$ sind, bereits bekannt sind, so kennt man auch die Logarithmen der aus ihnen zusammengesetzten Zahlen $m-1$ und $m+1$ und findet mithin aus 17) den $\log m$. Sobald also nur $\log 2$ bekannt ist, so findet man zunächst aus dieser Formel

$$\log 3 = \frac{\log 2 + \log 4}{2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{4.3^4} + \ldots = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{4.3^4} + \ldots$$

und hieraus allmälich die Logarithmen aller übrigen Primzahlen. Ist z. B. $m = 5$ so hat man

$$\log 5 = \frac{\log 4 + \log 6}{2} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{4.5^4} + \ldots$$

nun ist $\log 4 = 2 \log 2$, $\log 6 = \log 2 + \log 3$, da nun $\log 2$ und $\log 3$ als bekannt vorausgesetzt werden, so ist mithin auch $\log 5$ bekannt.

Behält man zur Berechnung von $\log m$ alle Glieder der Reihe bis $\frac{1}{2r.m^{2r}}$ ausschliesslich bei, so ist der vernachlässigte Theil der Reihe $R = \frac{1}{2r.m^{2r}} + \frac{1}{(2r+2)m^{2r+2}} + \ldots$

also $R < \frac{1}{2r.m^{2r}}\left(1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \ldots\right)$ d.h. $R < \frac{1}{2r.m^{2r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m^2}}$

$$\text{oder} \quad R < \frac{1}{2r.m^{2r-2}} \cdot \frac{1}{m^2 - 1}$$

Auch folgende Formel ist bei Berechnung der Logarithmen

sehr nützlich. Sey $q < p$, nun ist $p + q = p\left(1 + \frac{q}{p}\right)$, also $\log (p+q) = \log p + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{2p^2} + \frac{q^3}{3p^3} - \dots$

Setzt man näherungsweise $\log (p+q) = \log p + \frac{q}{p}$ so ist der vernachlässigte Theil der Reihe, abgesehen vom Zeichen, $\frac{q^2}{2p^2} - \frac{q^3}{3p^3} + \frac{q^4}{4p^4} - \dots < \frac{q^2}{2p^2}$, da die Glieder abwechselnde Zeichen haben, und unbeschränkt abnehmen (vgl. §. 84). Ist nun $q$ so klein gegen $p$, dass $\frac{q^2}{2p^2}$ keinen Einfluss auf die letzte Decimalstelle hat, welche man noch genau berechnen will, so kann man

$$\log (p+q) = \log p + \frac{q}{p}$$

setzen und mithin auf sehr einfache Weise $\log (p+q)$ finden, sobald man $\log p$ kennt.

86.

Will man die Logarithmen für eine von $e$ verschiedene Basis $a$ berechnen, so sey $a = e^h$ also $a^k = e^{kh} = b$; nun ist $k = {}^a\log b$, $kh = \log b$, aber $h = \log a$ also ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$.

Man muss also jeden natürlichen Logarithmen mit $\frac{1}{\log a}$ multipliciren, wenn man den Logarithmen für die Basis $a$ finden will*). Die Zahl $\frac{1}{\log a}$ nennt man den **Modul** für die Basis $a$. Ist $a = 10$, d. h. will man von den natürlichen Logarithmen

*) Es folgt hieraus zugleich eine Ergänzung des Satzes in §. 68. Es wird nemlich die Reihe $1 + \frac{1}{2\,({}^a\log 2)^m} + \frac{1}{3\,({}^a\log 3)^m} + \dots$ $= (\log a)^m \left[\frac{1}{(\log a)^m} + \frac{1}{2\,(\log 2)^m} + \frac{1}{3\,(\log 3)^m} + \dots\right]$ convergiren oder divergiren, je nachdem $m > 1$ oder $m \leqq 1$.

zu den gewöhnlichen (Briggischen) übergehen, so ist der Modul $\frac{1}{log\ 10} = 0{,}43429448\ \ldots$

Will man umgekehrt von Logarithmen für die Basis $a$ zu natürlichen Logarithmen übergehen, so hat man $log\ b = log\ a\ .\ {}^{a}log\ b$. Ist wieder $a = 10$ so ist $log\ 10 = 2{,}30258509$, mit welcher Zahl also die gewöhnlichen Logarithmen multiplicirt werden müssen wenn man die natürlichen erhalten will.

Man hat demnach näherungsweise

$${}^{a}log\ (p+q) = {}^{a}log\ p + {}^{a}log\left(1+\frac{q}{p}\right) = {}^{a}log\ p + \frac{q}{p}\cdot\frac{1}{log\ a}$$

$$\text{und }{}^{a}log\ (p+1) = {}^{a}log\ p + \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{log\ a}$$

mithin

$${}^{a}log\ (p+1) = {}^{a}log\ p + \frac{{}^{a}log\ (p+q) - {}^{a}log\ p}{q}$$

Auf dieser Formel beruht die Einrichtung der Proportionaltheile in unseren gewöhnlichen Logarithmentafeln.

Sind z. B. in einer solchen Tafel die Logarithmen der vierstelligen Zahlen unmittelbar gegeben und ist $v$ eine solche Zahl, man will aber den Logarithmen der 5stelligen Zahl $10v+1$ finden, so ist wenn man $p = 10v$, $q = 10$ setzt,

$${}^{10}log\ (10v+1) = {}^{10}log\ 10v + \frac{{}^{10}log\ (10v+10) - {}^{10}log\ 10v}{10}$$

$$= 1 + {}^{10}log\ v + \frac{{}^{10}log\ (v+1) - {}^{10}log\ v}{10}$$

also ist $\frac{{}^{10}log\ (v+1) - {}^{10}log\ v}{10}$ der Proportionaltheil welcher zu $1 + {}^{10}log\ v$ addirt werden muss, wenn man ${}^{10}log(10v+1)$ erhalten will. Man sieht alsdann, dass dieser Proportionaltheil doppelt, dreifach u. s. w. genommen werden muss, wenn man ${}^{10}log\ (10v+2)$, ${}^{10}log\ (10v+3)$ u. s. w. finden will.

Achtes Kapitel.

# Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren und Potenziren imaginärer Reihen. Convergenz imaginärer Reihen.

87.

In allen vorhergehenden Untersuchungen wurde vorausgesetzt, dass man es nur mit reellen Zahlengrössen zu thun hat. Da aber schon die Arithmetik genöthigt ist, die imaginären Grössen in den Kreis ihrer Betrachtungen zu ziehen, so versteht es sich von selbst, dass die Analysis nicht umhin kann dasselbe zu thun. Sie muss sich also, indem sie zu ihrem Ausgangspunkte zurückkehrt, die Frage vorlegen, wie die Operationen der Arithmetik an Reihen von der Form $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ auszuführen sind, wenn die Hauptgrösse $x$ nebst den Coefficienten $a_0, a_1 \dots$ auch imaginäre Zahlen ausdrücken können, in welchem Falle diese Reihen imaginäre genannt werden. Es wird hierbei aus der Arithmetik nicht blos der Begriff der imaginären Zahl als bekannt vorausgesetzt, sondern auch wie man an bestimmten imaginären Zahlen die arithmetischen Grundoperationen, das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren und Potenziren ausführen kann.

Im Folgenden soll nach dem Vorgange anderer Mathematiker, die imaginäre Einheit, welche man sonst durch $\sqrt{-1}$ anzudeuten pflegt, durch $i$ bezeichnet werden. Alle anderen Buchstaben, welche als Zahlzeichen gebraucht werden, sollen, wie früher, reelle Werthe behalten, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird. Einen Ausdruck wie $bi$, nemlich das Produkt aus einer reellen Zahl $b$ und $i$, nennen wir eine rein imaginäre Grösse, dagegen $a+bi$, d. h. die Summe einer reellen Grösse und einer rein imaginären, eine complexe Grösse. Die complexe Grösse enthält also die reelle als einzelnen Fall, indem man nur $b=0$ zu setzen braucht.

88.

Nun ist zunächst zu bedenken, dass die Entwickelungen

des dritten und vierten Kapitels von den Werthen, welche wir den Coefficienten und der Hauptgrösse $x$ geben, gänzlich unabhängig sind, und daher unverändert ihre Geltung behalten, mögen diese Werthe reell oder imaginär seyn. Die Definition und die Ausführung der Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens der Reihen bleibt also vollkommen dieselbe, wenn unter diesen Reihen auch imaginäre vorkommen. Da ferner die Entwickelungen des 5ten Kapitels lediglich auf den zwei vorhergehenden Kapiteln beruhen, so bleiben auch sie ungeändert, wenn wir sie auf imaginäre Reihen anwenden. Was also dort über den polynomischen und binomischen Lehrsatz gesagt wurde, behält seine unveränderte Geltung, sobald nur die Voraussetzung festgehalten wird, dass die Exponenten reelle Grössen sind.

89.

Wir nehmen ferner, den Untersuchungen des 6ten Kapitels (§. 42) analog, den Ausdruck imaginäre Reihe in allgemeinerem Sinne als bisher. Denken wir uns nemlich zwei aus reellen Grössen bestehende Reihen

1) $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$

2) $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$

aus welchen wir den Ausdruck

3) $(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + (u_3 + v_3 i) + \ldots.$

bilden, so nennen wir diesen Ausdruck eine imaginäre Reihe. Gehen die Glieder dieser Reihe unbeschränkt fort, so haben wir eine unendliche imaginäre Reihe, bei welcher wieder, wie bei der unendlichen reellen Reihe, drei Fälle zu unterscheiden sind. Nähert sich die Summe der $r$ ersten Glieder der Reihe 3) d. h. $u_1 + u_2 \ldots + u_r + (v_1 + v_2 + \ldots + v_r)i$ einem bestimmten Werthe, mit wachsendem $r$, unbegrenzt, so ist die Reihe eine convergirende und dieser Werth ihre Summe. Dieser Fall wird dann eintreten, wenn die Reihen 1) und 2) convergiren. Oscillirt dagegen eine der Reihen 1) und 2), während die andere convergirt oder ebenfalls oscillirt, so oscillirt die Reihe 3). Divergirt dagegen eine der Reihen 1) und 2) oder divergiren beide, so ist die Reihe 3) eine diver-

girende. Die Beschaffenheit der imaginären Reihen ist mithin auf die Beschaffenheit reeller Reihen zurückgeführt.

Eine endliche imaginäre Reihe ist immer als eine convergirende anzusehen.

Setzt man $x = p + qi$ so ist $x^r = (p + qi)^r$. Insofern $r$ eine ganze positive Zahl bedeutet, heisst $(p + qi)^r$ dass man $p + qi$ so oft, als $r$ andeutet, mit sich multipliciren soll, dies kann mithin nur ein Resultat geben, welches theils aus reellen theils aus rein imaginären Gliedern besteht, und welches daher durch $(p + qi)^r = a + bi$ dargestellt werden kann. Ist ferner $a_r = \alpha + \beta i$ so hat man $a_r x^r = (\alpha + \beta i)(a + bi)$, setzt man $\alpha a - \beta b = u_r$, $\alpha b + \beta a = v_r$ so hat man $a_r x^r = u_r + v_r i$. Es folgt hieraus, dass man jede imaginäre Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

auch in die Form der Reihe 3) bringen kann, und dass daher eine solche Reihe convergiren, oscilliren oder divergiren wird, je nachdem, wenn man $a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_r x^r = P_r + Q_r i$ setzt, entweder $P_r$ und $Q_r$ beide mit wachsendem $r$ sich einem bestimmten Werthe unbegrenzt nähern, oder eine dieser Grössen oscillirt während die andere nicht divergirt, oder (wenigstens) eine derselben divergirt.

Die zwei complexen Zahlen $u_r + v_r i$ und $u_r - v_r i$ nennt man conjugirte. Das Produkt derselben $(u_r + v_r i)(u_r - v_r i) = u_r^2 + v_r^2$ heisst die Norm einer jeden der zwei conjugirten Zahlen; die Quadratwurzel aus der Norm, positiv genommen, oder $(u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}}$, heisst der Modul einer jeden der zwei conjugirten Zahlen. Ist $v_r = 0$, d. h. geht die complexe Zahl $u_r + v_r i$ in die reelle $u_r$ über, so ist auch der Modul $= u_r$, d. h. die reelle Zahl ist ihr eigener Modul. Ist $u_r = 0$ so bleibt $v_r$ als Modul von $\pm v_r i$.

Wenn man in einer imaginären Reihe statt eines jeden Gliedes seinen Modul setzt, so soll die hierdurch entstehende reelle Reihe die Modulreihe heissen. Die Modulreihe der Reihe 3) z. B. ist $(u_1^2 + v_1^2)^{\frac{1}{2}} + (u_2^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots$

Man hat

$$u_r + v_r i = (u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u_r}{(u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{v_r i}{(u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Setzt man $(u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}} = m_r$, $\frac{u_r}{m_r} = U_r$, $\frac{v_r}{m_r} = V_r$

so ist mithin $U_r < 1$ und $V_r < 1$ und $u_r + v_r i = m_r (U_r + V_r i)$. In dem besonderen Falle wenn $v_r = 0$ ist $U_r = 1$, ist $u_r = 0$ so ist $V_r = 1$, auch ist in allen Fällen $U_r^2 + V_r^2 = 1$. Es folgt hieraus dass die Reihe 3) convergirt, sobald ihre Modulreihe convergirt. Denn nach dem Vorhergehenden ist diese Modulreihe

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots$$

und die Reihe 3)

$$m_1 (U_1 + V_1 i) + m_2 (U_2 + V_2 i) + m_3 (U_3 + V_3 i) + \dots$$

Diese Reihe wird also convergiren, wenn die zwei Reihen

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3 + \dots$$
$$m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 + \dots$$

convergiren. Da aber $U_1, U_2, U_3 \dots V_1, V_2, V_3 \dots$ ächte Brüche (und nur in einzelnen Fällen $= 1$) sind, so ist jede dieser Reihen im Allgemeinen kleiner (und in keinem Falle grösser) als die Modulreihe, beide Reihen werden demnach convergiren, sobald die Modulreihe convergirt. Die Reihe 3) wird also namentlich dann convergiren, wenn in der Modulreihe der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder (ohne Rücksicht auf das Zeichen) um ein Angebbares kleiner als die Einheit ist (§. 48). Ist dagegen dieser Quotient um ein Angebbares grösser als die Einheit, mithin die Modulreihe divergent, so wird auch die Reihe 3) divergiren. In diesem Falle wächst nemlich $m_r = (u_r^2 + v_r^2)^{\frac{1}{2}}$ mit $r$ über jede angebbare Grenze (§. 48), es muss daher wenigstens eine der zwei Grössen $u_r$ und $v_r$ über jede angebbare Grenze wachsen, mithin auch wenigstens eine der zwei Reihen 1) und 2) divergiren. Die Beschaffenheit der Reihe 3) bleibt daher nur dann zweifelhaft, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Modulreihe sich unbegrenzt der Einheit nähert und diese Reihe zugleich divergirt.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich noch ein Satz, von dem wir sogleich Gebrauch machen werden. Es ist nemlich der Modul der Summe mehrerer imaginärer Ausdrücke im Allgemeinen kleiner (und in keinem Falle grösser) als die Summe der Moduln der einzelnen Ausdrücke. Seyen diese Ausdrücke

$u_0 + v_0 i$, $u_1 + v_1 i \ldots u_r + v_r i$ also ihre Summe $(u_0 + u_1 \ldots + u_r + (v_0 + v_1 + \ldots + v_r) i$. Man setze $u_0 + u_1 \ldots + u_r = S$, $v_0 + v_1 \ldots + v_r = T$, also ist die Summe der imaginären Ausdrücke $S + Ti$, der Modul dieser Summe $(S^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}$. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung ist aber

$$S = m_0 U_0 + m_1 U_1 + \ldots + m_r U_r$$
$$T = m_0 V_0 + m_1 V_1 + \ldots + m_r V_r$$

also

$$S^2 + T^2 = (m_0 U_0 + m_1 U_1 \ldots + m_r U_r)^2 + (m_0 V_0 + m_1 V_1 \ldots + m_r V_r)^2$$

oder, wenn man die Quadrate entwickelt und bedenkt dass $U_0^2 + V_0^2 = 1$, $U_1^2 + V_1^2 = 1$ u.s.w. so findet man

$$S^2 + T^2 = m_0^2 + m_1^2 + \ldots + m_r^2 + 2 [m_0 m_1 (U_0 U_1 + V_0 V^1) + \ldots + m_{r-1} m_r \ (U_{r-1} U_r + V_{r-1} V_r]$$

Nun ist aber allgemein

$$(U_k U_l + V_k V_l)^2 = (U_k^2 + V_k^2)\ (U_l^2 + V_l^2) - (U_k V_l - V_k U_l)^2$$

und $U_k^2 + V_k^2 = 1$, $U_l^2 + V_l^2 = 1$; der Ausdruck $(U_k V_l - V_k U_l)^2$ ist aber positiv oder in besonderen Fällen $= 0$. Mithin ist $(U_k U_l + V_k V_l)^2 \leqq 1$ also auch $U_k U_l + V_k V_l \leqq 1$. Jeder der Ausdrücke $U_0 U_1 + V_0 V_1, \ldots U_{r-1} U_r + V_{r-1} V_r$ ist also $\leqq 1$ und hieraus folgt

$$S^2 + T^2 \leqq m_0^2 + m_1^2 \ldots + m_r^2 + 2 (m_0 m_1 + \ldots + m_{r-1} m_r)$$

d. h. $S^2 + T^2 \leqq (m_0 + m_1 \ldots + m_r)^2$

und mithin auch

$$(S^2 + T^2)^{\frac{1}{2}} \leqq m_0 + m_1 + \ldots + m_r$$

Nun bezeichnet $m_0 + m_1 + \ldots + m_r$ die Summe der Moduln der einzelnen Ausdrücke, der Satz ist also bewiesen.

## 90.

Den reellen Doppelreihen (§. 50) analog kann man auch eine imaginäre Doppelreihe durch das System

$$\text{I)} \left\{ \begin{array}{l} (u_{0,0} + v_{0,0} \cdot i) + (u_{0,1} + v_{0,1} \cdot i) \ldots + (u_{0,r} + v_{0,r} \cdot i) + \ldots \\ + (u_{1,0} + v_{1,0} \cdot i) + (u_{1,1} + v_{1,1} \cdot i) \ldots + (u_{1,r} + v_{1,r} \cdot i) + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + (u_{k,0} + v_{k,0} \cdot i) + (u_{k,1} + v_{k,1} \cdot i) \ldots + (u_{k,r} + v_{k,r} \cdot i) + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

ausdrücken. Diese imaginäre Doppelreihe wird convergiren, wenn, nachdem man das System

$$\text{II)}\left\{\begin{array}{l} (u_{0,0}+v_{0,0}.i)+\ldots+(u_{0,r}+v_{0,r}.i) \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(u_{k,0}+v_{k,0}.i)+\ldots+(u_{k,r}+v_{k,r}.i)\end{array}\right.$$

herausgehoben hat, die Summe einer beliebigen Anzahl der übrig bleibenden Glieder, in welcher Ordnung man sie nehmen mag, mit unbegrenzt wachsendem $k$ und $r$, unter jeden angebbaren Werth sinkt. Dies wird aber sicher der Fall seyn, wenn die Summe der Moduln dieser Glieder, bei unbegrenzt wachsendem $k$ und $r$, unter jeden angebbaren Werth sinkt. Die Doppelreihe I) wird also convergiren, wenn die Doppelreihe convergirt, die man erhält, indem man statt jedes Gliedes seinen Modul setzt. Bezeichnet man nun allgemein durch $m_{p,q}$ den Modul von $u_{p,q}+v_{p,q}.i$, so wird diese neue Doppelreihe durch das System

$$\text{III)}\left\{\begin{array}{l} m_{0,0}+m_{0,1}+\ldots+m_{0,r} \\ +m_{1,0}+m_{1,1}+\ldots+m_{1,r} \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +m_{k,0}+m_{k,1}+\ldots+m_{k,r} \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

gebildet.

Diese Doppelreihe convergirt aber, wenn die einzelnen Horizontalreihen und deren Summe convergirende Reihen sind (§. 51), unter denselben Umständen convergirt also auch die Doppelreihe I).

Ist $W$ der Werth der convergirenden Doppelreihe I) und bezeichnet man durch $W_{k,r}$ den Werth, welchen man erhält, wenn man in II) die Werthe der einzelnen Horizontalreihen zusammenzählt, so ist $W = \lim W_{k,r}$ wenn man $k$ und $r$ unbegrenzt wachsen lässt, $W_{k,r}$ ist aber zugleich der Werth, welchen man erhält, wenn man in II die Werthe der einzelnen Verticalreihen zusammenzählt. D. h. wenn die Doppelreihe I) convergirt, erhält man ihren Werth, indem man die Summe ihrer einzelnen Horizontalreihen oder ihrer einzelnen Verticalreihen nimmt.

## 91.

Rücksichtlich der Addition und Subtraktion zweier imagi-

närer Reihen kann man, nach dem Vorhergehenden, die in §. 52 für reelle Reihen bewiesenen Sätze sofort auf die imaginären übertragen. Sind nemlich $\Sigma a_r x^r$ und $\Sigma b_r x^r$ zwei convergirende imaginäre Reihen, so hat man

$$\Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r = \Sigma (a_r + b_r) x^r$$
$$\Sigma a_r x^r - \Sigma b_r x^r = \Sigma (a_r - b_r) x^r$$

Ebenso kann man in Beziehung auf die Multiplication zweier imaginärer Reihen einen dem in §. 53 bewiesenen analogen Satz aufstellen.

Seyen nemlich

$$4) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots .$$
$$5) \qquad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots ,$$

zwei convergirende imaginäre Reihen, $W$ und $W'$ ihre Werthe und $A_0 + A_1 x + \ldots$ das ihrer Multiplication entsprechende Produkt. Man setze allgemein $a_k x^k = u_k + v_k i$, $b_k x^k = s_k + t_k i$, $(u_k^2 + v_k^2)^{\frac{1}{2}} = m_k$, $(s_k^2 + t_k^2)^{\frac{1}{2}} = n_k$. Demnach hat man

$$W = u_0 + v_0 i + u_1 + v_1 i + u_2 + v_2 i + \ldots .$$
$$W' = s_0 + t_0 i + s_1 + t_1 i + s_2 + t_2 i + \ldots ;$$

Sind nun die Modulreihen der Reihen 4) und 5) d. h. die Reihen

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots$$
$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots$$

convergent, so kann man das Zeichen des Entsprechens durch das Gleichheitszeichen ersetzen und hat

$$WW' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

Führt man nemlich, wie in §. 53, die Multiplication der Reihen 4) und 5) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} b_0 a_0 &+ b_0 a_1 x + b_0 a_2 x^2 + \ldots \\ &+ b_1 x a_0 + b_1 x . a_1 x + \ldots \\ &\qquad + b_2 x^2 . a_0 + \ldots . \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und wenn man allgemein statt $a_k x^k$, $b_k x^k$ ihre oben eingeführten Werthe setzt

$$6) \left\{ \begin{aligned} &(s_0 + t_0 i)(u_0 + v_0 i) + (s_0 + t_0 i)(u_1 + v_1 i) + (s_0 + t_0 i)(u_2 + v_2 i) + \ldots \\ &\qquad + (s_1 + t_1 i)(u_0 + v_0 i) + (s_1 + t_1 i)(u_1 + v_1 i) + \ldots \\ &\qquad\qquad + (s_2 + t_2 i)(u_0 + v_0 i) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Man hat also hier eine imaginäre Doppelreihe, deren einzelne Glieder die Form $(s_p + t_p i)(u_q + v_q i)$ haben, der Modul eines solchen Gliedes ist $(s_p^2 + t_p^2)^{\frac{1}{2}} (u_q^2 + v_q^2)^{\frac{1}{2}} = n_p \cdot m_q$ *). Wenn man nun statt jedes Gliedes dieser Doppelreihe seinen Modul nimmt, so erhält man die Doppelreihe

$$
A) \left\{ \begin{array}{l} n_0 m_0 + n_0 m^1 + n_0 m_2 + \ldots . \\ \quad\quad\quad + n_1 m_0 + n_1 m_1 + \ldots . \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + n_2 m_0 + \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.
$$

Bei dieser Doppelreihe convergiren aber nicht blos die einzelnen Horizontalreihen, deren Werth

$$n_0 (m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)$$
$$n_1 (m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)$$
$$n_2 (m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)$$
u. s. w.

ist, sondern es convergirt auch die aus diesen Horizontalreihen gebildete Reihe, deren Werth $(n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)$ $(m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)$ ist. Diese Doppelreihe convergirt also und mithin auch die Doppelreihe 6). Der Werth dieser letzteren Reihe ist demnach der Summe ihrer Horizontalreihen gleich d. h.

$= (s_0 + t_0 i) W + (s_1 + t_1 i) W + \ldots = (s_0 + t_0 i + s_1 + t_1 i + \ldots) W$ $= WW'$. Aber andererseits ist ihr Werth auch die aus ihren Verticalreihen gebildete Reihe, diese letztere ist aber nichts Anderes als die Reihe $A_0 + A_1 x + \ldots$, mithin ist

$$WW' = A_0 + A_1 x + \ldots .$$

Da die Doppelreihe $A$) convergirt, so convergirt auch die Reihe, welche aus ihren Verticalreihen gebildet ist, d. h. die Reihe

$$n_0 m_0 + (n_0 m^1 + n^1 m_0) + (n_0 m_2 + n_1 m_1 + n_2 m_0) + \ldots,$$

deren allgemeines Glied

$$n_0 m_r + n_1 m_{r-1} + \ldots + n_r m_0$$

ist. Hieraus folgt, dass die Reihe $A_0 + A_1 x + \ldots$ selbst

---

*) Denn da $(s_p + t_p i)(u_q + v_q i) = (s_p u_q - t_p v_q) + (t_p u_q + s_p v_q) i$ so ist die Norm $(s_p u_q - t_p v_q)^2 + (t_p u_q + s_p v_q)^2 = (s_p^2 + t_p^2)(u_q^2 + v_q^2)$.

wieder die Eigenschaft hat, dass ihre Modulreihe convergirt, sobald nur die Modulreihen der Reihen 4) und 5) convergiren. Da nemlich das allgemeine Glied dieser Reihe

$$A_r x^r = a_r x^r b_0 + a_{r-1} x^{r-1} . bx \ldots + a_0 b_r x^r$$

ist, und die Summe der Moduln der einzelnen hierin enthaltenen Glieder

$$n_0 m_r + n_1 m_{r-1} \ldots + n_r m_0$$

ist, so ist nach dem in §. 89 bewiesenen Satze der Modul von $A_r x^r$ kleiner als diese Summe. Nun wurde soeben bemerkt, dass die Reihe, deren allgemeines Glied diese Summe ist, convergirt, umsomehr muss also die Reihe convergiren, deren allgemeines Glied der Modul von $A_r x^r$ ist, d. h. die Modulreihe der Reihe $A_0 + A_1 x + \ldots$

## 92.

Ist also ausser den zwei convergirenden Reihen 4) und 5) auch noch die convergirende Reihe

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

gegeben und ist zugleich deren Modulreihe convergent, so hat man auch

$$(a_0 + a_1 x + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x +) \ldots$$
$$= (A_0 + A_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots) = \Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$$

wenn $\Sigma\, {}^r\overset{3}{V} x^r$ das der Multiplication dieser drei Reihen entsprechende Produkt bezeichnet. Hieraus folgt, dem §. 53 analog, der Satz:

Hat man eine endliche Anzahl imaginärer Reihen, deren Modulreihen convergiren, so wird das der Multiplication dieser Reihen entsprechende Produkt auch das wirkliche Produkt dieser Reihen, im Sinne der Arithmetik, seyn.

Ist daher die Modulreihe der imaginären Reihe $\Sigma a_r x^r$ convergent und man hat

$$(\Sigma a_r x^r)^m \doteq \Sigma A_r x^r$$

wo $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet, so hat man auch

$$(\Sigma a_r x^r)^m = \Sigma A_r x^r$$

Da nun $1 + x$ immer einen bestimmten endlichen Werth hat, auch wenn $x = u + vi$ ist, mithin auch der Modul $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$,

so ist die Modulreihe des Binoms $1 + x$, d. h. der Ausdruck $1 + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, weil er endlich ist, als eine convergente Reihe anzusehen, und es folgt hieraus, sobald $m$ eine ganze positive Zahl ist, da

$$(1 + x)^m \ddagger \Sigma\, {}^m\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

welcher Ausdruck für reelle wie für imaginäre Werthe von $x$ gilt (§. 88), auch

$$(1 + x)^m = \Sigma\, {}^m\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

Ist $m$ eine gebrochene positive Zahl $= \frac{p}{q}$ so hat man, auch wenn $x = u + vi$,

$$\left[\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r\right]^q \ddagger (1 + x)^p$$

Die Modulreihe von $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ ist $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} (u^2 + v^2)^{\frac{r}{2}}$ und in dieser Modulreihe ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{{}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} (u^2 + v^2)^{\frac{r}{2}}}{{}^{\frac{p}{q}}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} (u^2 + v^2)^{\frac{r-1}{2}}} = \frac{\frac{p}{q} - (r - 1)}{r} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Modulreihe wird also convergiren wenn $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ (vergl. §. 56) und mithin hat man dann

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} = \Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

Ist $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} > 1$ so divergirt die Reihe $\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ (nach §. 89), dann muss das Zeichen des Entsprechens bleiben. Ebenso folgt, dass die Modulreihe von $\Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$, wenn $x = u + vi$, eine convergente Reihe ist, wenn $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$, nun ist

$$\Sigma\, {}^{\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r \,.\, \Sigma\, {}^{-\frac{p}{q}}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r \ddagger 1$$

also, wenn $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$, auch

$$\Sigma \overset{r}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r \,.\, \Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r = 1$$

und $$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\Sigma \overset{r}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r} = \Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$$

Ist $u^2 + v^2 = 1$ mithin auch $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ so geht die Modulreihe von $\Sigma \overset{r}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$ in $1 + \overset{1}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} + \ldots$ über, welche Reihe, wie früher bewiesen wurde, convergirt (§. 63). Also ist auch in diesem Falle

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \Sigma \overset{r}{\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$$

Ebenso folgt aus dem dort Bewiesenen, dass wenn $u^2+v^2=1$ auch

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = \Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}} x^r$$

sobald $\frac{p}{q} < 1$, indem dann die Modulreihe $\Sigma \overset{r}{-\frac{p}{q}\mathfrak{B}}$ convergirt.

Auch wird es unnöthig seyn hier nochmals nachzuweisen, dass diese Sätze ihre Geltung behalten, wenn der Exponent des Binoms eine irrationale Zahl ist (vgl. §. 57).

Verbindet man das Vorhergehende mit dem §. 64, so hat man nun das allgemeine Resultat: Ist $x = u + vi$, wo sowohl $u$ als $v$ auch Null seyn können, so gilt die Gleichung

$$7) \qquad (1+x)^m = \Sigma \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} x^r$$

für jeden Werth von $m$ wenn $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$. Ist $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ so gilt sie für jeden Werth von $m$ zwischen $m = -1$ und $m = \infty$, sobald nicht $x = u = -1$ (in welchem Falle $v = 0$ seyn muss), in diesem letzteren Falle muss $m$ positiv seyn. Ausserdem gilt die Gleichung für jeden Werth von $x$ sobald $m$ eine ganze positive Zahl ist. In allen übrigen Fällen ist $\Sigma \overset{r}{{}_m\mathfrak{B}} x^r$ eine divergirende Reihe und man muss dann statt des Gleichheitszeichens das Zeichen des Entsprechens setzen. Ist

$m$ eine gebrochene positive oder negative Zahl $\frac{p}{q}$ so sagt die Gleichung 7) wieder nur, dass $\Sigma\, {}_m\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ eine Zahl ist, deren $q$te Potenz der $p$ten Potenz von $1+x$ gleich ist, und es bleibt daher wieder die Frage, ob es nicht noch andere Ausdrücke giebt, welche dieselbe Bedingung erfüllen (vgl. §. 65). Diese Frage wird später (§. 113) beantwortet werden.

Ist
$$\frac{\Sigma\, a_r x^r}{\Sigma\, b_r x^r} \doteqdot \Sigma\, A_r x^r$$
und sind die Modulreihen der imaginären Reihen $\Sigma\, b_r x^r$ und $\Sigma\, A_r x^r$ convergirende Reihen, so folgt mithin aus
$$\Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, A_r x^r \doteqdot \Sigma\, a_r x^r$$
auch
$$\Sigma\, b_r x^r \,.\, \Sigma\, A_r x^r = \Sigma\, a_r x^r \quad (\S.\ 90)$$
und
$$\frac{\Sigma\, a_r x^r}{\Sigma\, b_r x^r} = \Sigma\, A_r x^r$$

## Neuntes Kapitel.

## Die Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten. Sinus und Cosinus reeller Zahlen.

---

### 93.

Setzt man in der Reihe, welche den Werth von $e^x$ angiebt (Kap. 7 Form. 5), statt $x$ überall $u+vi$ so erhält man die Reihe
$$1 + (u+vi) + \frac{(u+vi)^2}{1\,.\,2} + \frac{(u+vi)^3}{1.2.3} \ldots + \frac{(u+vi)^r}{1.2\ldots r} + \ldots.$$
welche offenbar für jeden endlichen Werth von $u+vi$, convergirt, da ihre Modulreihe
$$1 + (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{u^2+v^2}{1\,.\,2} + \frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \ldots.$$
convergirt, wie man sogleich sieht, wenn man $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = x$ setzt. Den Werth dieser imaginären Reihe bezeichnen wir durch das Symbol $e^{u+vi}$, so dass nun allgemein unter $e^x$ der Werth der Reihe $1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} \ldots$ verstanden wird, wel-

chen (endlichen) reellen oder imaginären Werth die Grösse $x$ haben mag.

Sobald aber $x$ keine reelle Zahl ist, sind wir auch nicht mehr berechtigt auf das in Form einer Potenz geschriebene Symbol $e^x$ die Regeln anzuwenden, welche die Arithmetik bei der Multiplication, Division und Potenzirung der Potenzen mit reellen Exponenten nachweist. Wir können aber beweisen, dass die charakteristische Eigenschaft der reellen Potenzen, auf welchen jene Regeln beruhen und welche durch die Gleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ausgedrückt wird, auch dann noch statt findet, wenn eine der Grössen $x$, $y$ oder jede imaginär ist, so dass wir mit Recht den Ausdruck $e^{u+vi}$ als eine Potenz mit imaginärem Exponenten, oder, insofern $u+vi$ verschiedene Werthe annehmen kann, als eine Exponentialgrösse mit imaginärem Exponenten ansehen werden (§. 79).

94.

Dies zu beweisen dient folgender Satz:

Wenn man zwei imaginäre convergirende Reihen

a) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$

b) $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots.$

hat, so dass $W$ der Werth der ersten, $W'$ der Werth der zweiten ist, und man bildet aus ihnen eine neue Reihe dadurch, dass man aus den zwei Elementenreihen

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots \end{matrix}$$

die Variationen der zweiten Klasse bildet, jede Form $a_k b_l$ noch mit $x^k y^l$ multiplicirt, und dann alle so gebildeten Ausdrücke (in welchen alle Elemente jeder Form als durch Multiplication verbunden angesehen werden) so zusammenaddirt, dass alle Ausdrücke, bei welchen die Summe $s$ der Exponenten der darin enthaltenen Potenzen von $x$ und $y$ dieselbe ist, zusammengestellt und als das $s$te Glied der neuen Reihe betrachtet werden, so wird diese neue Reihe die Form

c) $a_0 b_0 + (b_0 a_1 x + b_1 a_0 y) + (b_0 a_2 x^2 + b_1 a_1 x^1 y^1 + a_0 b_2 y^2) + \ldots.$

haben. Sind nun die Modulreihen der Reihen a) und b) convergent, so wird auch die Reihe c) convergiren und ihr Werth

$WW'$ seyn. Dieser Satz ist offenbar eine Verallgemeinerung des in §. 91 rücksichtlich der Multiplication zweier imaginärer Reihen bewiesenen. Denn setzt man $y = x$, so gehen die Reihen a) und b) in die dortigen Reihen 4) und 5) über, und die Reihe c) in die dortige Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ In der That haben wir auch nur den dort gegebenen Beweis zu wiederholen und können uns deswegen hier kürzer fassen. Man setze nemlich wieder allgemein $a_k x^k = u_k + v_k i$; $b_k y^k = s_k + t_k i$; $(u_k^2 + v_k^2)^{\frac{1}{2}} = m_k$; $(s_k^2 + t_k^2)^{\frac{1}{2}} = n_k$. Die Modulreihen der Reihen a) und b) sind also bezüglich

d) $\quad m_0 + m_1 + m_2 + \ldots.$

e) $\quad n_0 + n_1 + n_2 + \ldots.$

und die Reihe c) geht in

$$\text{f)} \quad \begin{aligned}(s_0+t_0 i)(u_0+v_0 i)&+(s_0+t_0 i)(u_1+v_1 i)+(s_0+t_0 i)(u_2+v_2 i)+\ldots\\ &+(s_1+t_1 i)(u_0+v_0 i)+(s_1+t_1 i)(u_1+v_1 i)\\ &+(s_2+t_2 i)(u_0+v_0 i)\end{aligned}$$

über, so dass diese Reihe f) vollkommen mit der Reihe 6) des §. 91 übereinstimmt. Ihre Modulreihe ist daher auch wieder

$$\begin{aligned}n_0 m_0 + n_0 m_1 &+ n_0 m_2 + \ldots.\\ + n_1 m_0 &+ n_1 m_1 + \ldots.\\ &+ n_2 m_0 + \ldots.\end{aligned}$$

welche, wie in §. 91 bewiesen wurde, convergirt, weil die Reihen d) und e) der Voraussetzung gemäss, convergiren. Mithin convergirt auch die Reihe f) und ihr Werth ist die Summe ihrer Horizontalreihen oder $WW'$. Aber ihr Werth ist zugleich auch die Summe ihrer Verticalreihen, welche wieder nichts Anderes als die Reihe c) ist. Also

$$\begin{aligned}WW' = a_0 b_0 &+ b_0 a_1 x + \ldots.\\ &+ a_0 b_1 y\end{aligned}$$

Nun haben wir bewiesen, dass sowohl die Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

als auch ihre Modulreihen convergiren, auch wenn $x$ und $y$ imaginäre Werthe sind. Setzt man also diese Reihen statt der

Reihen a) und b) so genügen sie den gemachten Voraussetzungen. Die Reihe c) wird hier

$$1 + (x + y) + (\frac{x^2}{1 \,.\, 2} + xy + \frac{y^2}{1 \,.\, 2}) + \ldots = e_x \,.\, e^y$$

und das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{x^n}{1..n} + \frac{x^{n-1}}{1..(n-1)} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{1..(n-2)} \cdot \frac{y^2}{1.2} \ldots + \frac{x^{n-r}}{1..(n-r)} \cdot \frac{y^r}{1\ldots r} \ldots + \frac{y^n}{1\ldots n}$$

Bezeichnet man dieses allgemeine Glied durch $S_n$ so ist

$$e^x \,.\, e^y = 1 + S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n + \ldots$$

Nun ist

$$S_n = \frac{x^n}{1\ldots.n} \left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n.(n-1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$$= \frac{x^n}{1\ldots n} \overset{r}{\underset{0,n}{\Sigma}} \, {}_n\overset{r}{\mathfrak{B}} \left(\frac{y}{x}\right)^r$$

oder, da $n$ eine ganze positive Zahl ist, (vgl. §. 41 Form. 31)

$$S_n = \frac{x^n}{1\ldots n} \Sigma \, {}_n\overset{r}{\mathfrak{B}} \left(\frac{y}{x}\right)^r$$

Sey nun $x = p + qi$; $y = f + gi$, so ist $\frac{y}{x} = \frac{f + gi}{p + qi}$ $= \frac{(f + gi)(p - qi)}{p^2 + q^2} = \frac{fp + gq}{p^2 + q^2} + \frac{gp - fq}{p^2 + q^2} i$. Setzt man daher $\frac{fp + gq}{p^2 + q^2} = u$, $\frac{gp - fg}{p^2 + q^2} = v$, so ist $\frac{y}{x} = u + vi$, mithin (§. 92)

$$\Sigma \, {}_n\overset{r}{\mathfrak{B}} \left(\frac{y}{x}\right)^r = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$$

und

$$S_n = \frac{1}{1.2..n} x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = \frac{(x + y)_n}{1.2\ldots n}$$

Demnach

$$e^x \,.\, e^y = 1 + \frac{x + y}{1} + \frac{(x + y)^2}{1 \,.\, 2} \ldots + \frac{(x + y)^n}{1.2..n} + \ldots$$

d. h.

1) $$e^x \,.\, e^y = e^{x+y}$$

95.

In dem besonderen Falle, wenn man $xi$ statt $x$ setzt, wo nun $x$ wieder eine reelle Zahl bedeutet, erhält man

2) $$e^{xi} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{1.2} + \frac{(xi)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(xi)^r}{1.2..r} + \ldots$$

wofür man auch schreiben kann

$$e^{xi} = 1 + \frac{(xi)^2}{1.2} + \frac{(xi)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$+ i\left(x + \frac{x^3 i^2}{1.2.3} + \frac{x^5 i^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)$$

oder da $i^{2r} = +1$ oder $-1$ je nachdem $r$ gerade oder ungerade ist,

3) $$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$
$$+ i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

Die Werthe der hier zum Vorschein kommenden Reihen führen in der Analysis besondere Namen. Man setzt nemlich

4) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} \ldots$$

5) $$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} \ldots$$ *)

Zwar haben die Zeichen *cos* und *sin* schon eine bestimmte Bedeutung in der Trigonometrie. Es wird auch später von dem Zusammenhang der Reihen 4) und 5) mit der trigonometrischen Bedeutung von *cos* und *sin* die Rede seyn. Vorläufig aber sehen wir gänzlich von diesem Zusammenhange ab und betrachten $\cos x$ und $\sin x$ nur als analytische Kunstausdrücke, durch welche die Werthe der zwei convergirenden Reihen 4) und 5) bezeichnet werden.

Zunächst folgt aus 3)

6) $$e^{xi} = \cos x + \sin x \,.\, i$$

und

7) $$e^{-xi} = \cos x - \sin x \,.\, i$$

*) Das Zeichen *cos* spricht man Cosinus aus, das Zeichen *sin* aber Sinus.

also wenn man diese Ausdrücke mit einander multiplicirt (Form. 1)

8) $e^0 = 1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$

Addirt man zuerst die Formeln 6) und 7) und subtrahirt man dann die zweite von der ersten, so erhält man

9) $$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

10) $$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Ferner wenn man die zwei Gleichungen

$$e^{xi} = \cos x + \sin x \,.\, i$$
$$e^{yi} = \cos y + \sin y \,.\, i$$

mit einander multiplicirt

$$e^{(x+y)i} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

da aber

$$e^{(x+y)i} = \cos(x + y) + \sin(x + y) i$$

so folgt

11) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

12) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Ebenso findet man aus

$$e^{xi} \,.\, e^{-yi} = e^{(x-y)i}$$

13) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

14) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Multiplicirt man demnach die $n$ Ausdrücke $e^{a_1 i} \,.\, e^{a_2 i} \ldots e^{a_n i}$ mit einander, so dass man $e^{a_1 i} \,.\, e^{a_2 i} \ldots e^{a_n i} = e^{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)i}$ hat, so folgt

15) $$(\cos a_1 + \sin a_1 \,.\, i)(\cos a_2 + \sin a_2 \,.\, i) \ldots (\cos a_n + \sin a_n \,.\, i)$$
$$= \cos(a_1 + a_2 + \ldots a_n) + \sin(a_1 + a_2 \ldots + a_n) i$$

Setzt man hier

$$a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = a$$

so erhält man

16) $(\cos a + \sin a \,.\, i)^n = \cos na + \sin na \,.\, i$

96.

Will man für jedes gegebene reelle $x$ den Werth von $e^{xi}$ berechnen, also ein imaginäres Potenzensystem mit der Basis $e$ und dem Exponenten $xi$, so folgt aus 6) dass man nur $\cos x$ und $\sin x$ zu bestimmen hat. In dieser Beziehung ist nun zunächst zu bemerken, dass man die Werthe von $\cos x$ und $\sin x$ nur für alle positiven Werthe von $x$ zu finden braucht. Der Werth der Reihe 4) bleibt nemlich ungeändert, wenn man $-x$ statt $x$ setzt, während in der Reihe 5) alle Glieder durch diese Substitution das entgegengesetzte Zeichen erhalten. Man hat also

17) $\cos(-x) = \cos x$

18) $\sin(-x) = -\sin x$

Beschränken wir uns daher auf die positiven Werthe von $x$, so ist ferner zu bemerken, dass man nicht die beiden Werthe $\cos x$ und $\sin x$ sondern nur einen derselben unmittelbar zu berechnen braucht, indem man aus jedem derselben den anderen ableiten kann. Denn aus 8) folgt

19) $\cos x = \pm \sqrt{1 - (\sin x)^2}$

20) $\sin x = \pm \sqrt{1 - (\cos x)^2}$

wo also nur das zweideutige Zeichen noch genauer zu bestimmen ist, was sogleich geschehen soll.

Mag man nun $\sin x$ oder $\cos x$ auswählen, so braucht man den Werth nicht für jedes $x$ besonders zu berechnen, sondern, wenn man von $x = 0$ ausgeht, so wird man von da bis zu einem bestimmten Werth von $x$, welcher aus einem später zu erörternden Grunde $2\pi$ heissen soll, für keine zwei dazwischen liegenden Werthe von $x$, zugleich für $\sin x$ und für $\cos x$ denselben Werth finden, wenn man nicht blos den absoluten Zahlenwerth sondern zugleich das Zeichen berücksichtigt. Für $x = 2\pi$ erhalten $\sin$ und $\cos$ wieder denselben Werth wie für $x = 0$ und es wiederholen sich zwischen $x = 2\pi$ und $x = 4\pi$ genau dieselben Werthe in derselben Ordnung, so dass, wenn $a < 2\pi$, $\sin(2\pi + a) = \sin a$ und $\cos(2\pi + a) = \cos a$. Dieses Verhältniss wiederholt sich nun immer fort in derselben Weise, so dass allgemein, wenn $m$ eine ganze Zahl bedeutet, $\cos(2m\pi + a) = \cos a$ und $\sin(2m\pi + b) = \sin a$.

Man sagt daher *sin* und *cos* seyen periodische Funktionen von $x$, indem man hiermit ausdrückt, dass immer dieselben Werthe in derselben Ordnung wiederkehren, wie auch $x$ wachsen mag.

97.

Um diese wichtige Eigenschaft von *sin* und *cos* nachzuweisen, bemerke man zunächst dass sich unmittelbar aus den Formeln 4) und 5)

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0$$

ergiebt. Ferner zeigen diese Formeln, dass $\sin x$ und $\cos x$ positiv seyn müssen, so lange $x$ positiv und nicht grösser als die Einheit ist. Denn in beiden Reihen ist unter dieser Voraussetzung jedes Glied kleiner als das vorhergehende, während die Zeichen abwechseln. Man hat daher (vgl. §. 59) so lange $x \leqq 1$ und zugleich $x > 0$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{1.2.3} \text{ oder } \sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3}\right)$$

also $\cos x$ und $\sin x$ positiv und grösser als Null. Aus 8) folgt aber, dass sowohl $\sin x$ als $\cos x$ nur ächte Brüche oder die Einheit sind, und zwar muss $\cos x$ oder $\sin x$ Null seyn, wenn $\sin x$ oder $\cos x$ die Einheit seyn soll. Mithin müssen sowohl $\cos x$ als $\sin x$ für alle Werthe von $x$, die grösser als Null und nicht grösser als die Einheit sind, positive ächte Brüche seyn. Nun ist $\cos(0) = 1$, $\cos(1) > \frac{1}{2}$, $\sin(0) = 0$, $\sin(1) > \frac{5}{6}$. Zwischen diesen Grenzen muss aber $\cos x$ immer abnehmen und $\sin x$ immer zunehmen. Hat man nemlich für eine Zahl $a$, welche zwischen 0 und 1 liegt, $\cos a$ berechnet, und ist $a + b > a$ und ebenfalls zwischen 0 und 1 enthalten, so ist nach 11)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

nun sind, wie eben bewiesen wurde, $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$ sämmtlich positive ächte Brüche, man hat also $\cos(a + b)$

$< \cos a \cos b$ und um so mehr $\cos(a+b) < \cos a$. Ebenso ist nach 14)

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

also wenn $a$ und $b$ beide zwischen 0 und 1 liegen und $a > b$

$$\sin(a-b) < \sin a \cos b, \text{ um so mehr } \sin(a-b) < \sin a$$

Für jede Zahl $x$ zwischen 0 und 1 hat also sowohl $\sin x$ als $\cos x$ einen anderen Werth. Schreibt man die Reihe 4) in der Form

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \left(\frac{x^6}{1\ldots6} - \frac{x^8}{1..8}\right) - \ldots$$

so folgt auch noch (§. 59)

$$\cos(1) < 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4}$$

d. h. $\cos(1) < 0{,}54\ldots$ und umsomehr $\cos(1) < 0{,}55$.

Indem nun $\cos x$ zwischen $x=0$ und $x=1$ fortwährend abnehmend, alle Werthe durchläuft, welche zwischen 1 und einer Zahl, die $> 0{,}5$ und $< 0{,}55$ ist, enthalten sind, muss er auch einmal zwischen diesen Grenzen den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$ erhalten*), d. h. es muss zwischen 0 und 1 eine Zahl $k$ geben, für welche $\cos k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nun ist $\sin k = \sqrt{1-(\cos k)^2}$ also auch $\sin k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es giebt also zwischen 0 und 1 eine Zahl $k$ welche die Eigenschaft hat, dass $\sin k = \cos k$. Es giebt aber zwischen diesen Grenzen auch nur eine einzige Zahl dieser Art. Sobald nemlich $\sin x$ und $\cos x$ gleichen Werth haben, muss jede dieser Grössen $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ seyn, weil dann in Folge der Formel 8)

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 2(\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 = 1$$

Nun muss aber $\cos x$ grösser oder kleiner als $\cos k$ seyn, je nachdem die zwischen 0 und 1 liegende Zahl $x$ kleiner oder

---

*) Es ist nemlich nicht zu übersehen, dass sich $\cos x$, wenn $x$ sich allmälich ändert, ebenfalls allmälich und nicht etwa sprungweise ändert. Denn ist $b$ eine sehr kleine Zahl, so ist $\cos b$ der Einheit sehr nahe, während $\sin b$ sehr klein ist; dann ist auch $\cos(a+b)$ sehr wenig von $\cos a$ verschieden.

grösser als $k$ ist; die Zahl $k$ ist folglich die einzige zwischen Null und 1 liegende Zahl, bei welcher der Cosinus den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hat.

Setzt man nun in Formel 11)

$$x = y = k$$

so folgt

$$\cos 2\,k = \cos k \cos k - \sin k \,.\, \sin k$$

also da $\cos k = \sin k$

$$21) \qquad \cos 2\,k = 0$$

98.

Es ist hierdurch nachgewiesen, dass es zwischen 0 und 2 eine Zahl giebt, für welche der Cosinus Null ist; und es folgt hieraus zugleich, dass sie zwischen 1 und 2 liegt. Läge sie nemlich zwischen 0 und 1, so müsste ihr Cosinus zwischen 1 und 0, 55 liegen. Auch ist klar, dass es nur eine einzige Zahl dieser Art zwischen diesen Grenzen giebt, weil es sonst auch mehr als eine Zahl zwischen 0 und 1 geben müsste, für welche Cosinus und Sinus denselben Werth haben. Demnach folgt aus 20)

$$\sin 2\,k = \pm 1$$

Die Zweideutigkeit des Zeichens ist aber leicht zu heben. Denn aus 5) folgt

$$\sin 2k = 2k - \frac{2^3 k^3}{1.2.3} + \frac{2^5 k^5}{1\ldots5} - \frac{2^7 k^7}{1\ldots7} + \frac{2^9 k^9}{1\ldots9} - \frac{2^{11} k^{11}}{1\ldots11} + \ldots$$

oder

$$\sin 2k = 2k\,(1 - \frac{2^2 k^2}{2\,.\,3}) + \frac{2^5 k^5}{1\ldots5}(1 - \frac{2^2 k^2}{6\,.\,7}) + \frac{2^9 k^9}{1\ldots9}\,(1 - \frac{2^2 k^2}{10\,.\,11}) + \ldots$$

nun ist $2k < 2$ also $2^2 k^2 < 4$, um so mehr $2^2 k^2 < 6\,.\,7$, $2^2 k^2 < 10\,.\,11$ u. s. w.

mithin $\sin 2k > 2k\,(1 - \frac{2^2 k^2}{2\,.\,3})$, um so mehr $\sin 2k >$ $2k\,(1 - \frac{4}{6})$ also sin $2k$ positiv und zwar

$$22) \qquad \sin 2k = 1$$

Man betrachte jetzt eine Zahl $a$ welche zwischen 1 und $2k$

liegt und setze $a = 2k - b$. Da $2k < 2$, so muss mithin $b < 1$ seyn. Ferner

$$\cos a = \cos(2k - b) = \cos 2k \cos b + \sin 2k \sin b = \sin b$$
$$\sin a = \sin(2k - b) = \sin 2k \cos b - \cos 2k \sin b = \cos b$$

Hieraus folgt, dass auch für jede zwischen 1 und $2k$ liegende Zahl $a$ sowohl $\cos a$ als $\sin a$ positive ächte Brüche sind, und zugleich, da jedem bestimmten $a$ ein bestimmtes $b$ entspricht, dass es zwischen diesen Grenzen nicht zwei Zahlen giebt, für welche Cosinus oder Sinus denselben Werth haben.

Es folgt hieraus ferner, dass es, um die Werthe der Cosinus und Sinus aller Zahlen zwischen 0 und $2k$ zu erhalten, genügt, die Sinus oder Cosinus aller Zahlen zwischen 0 und $k$ unmittelbar zu berechnen. Denn, wie schon oben (§. 96) bemerkt wurde, kann man immer aus dem bekannten Sinus den Cosinus und umgekehrt finden. Gesetzt also, man habe die Cosinus aller Zahlen zwischen 0 und $k$ mit Hülfe der Reihe 4) berechnet, so findet man daraus die Sinus dieser Zahlen. Wird nun der Sinus oder Cosinus einer Zahl $a$ gesucht, welche zwischen $k$ und $2k$ liegt, so setze man $a = 2k - b$, nun ist $b < k$, mithin sind $\sin b$ und $\cos b$ bekannt, also auch $\cos a = \sin b$ und $\sin a = \cos b$. Je grösser aber $a$ ist, desto kleiner ist $b$, desto kleiner ist also auch $\sin b$ und desto grösser $\cos b$. Die Cosinus nehmen also auch von $k$, wo $\cos k = \sin k$, bis $2k$ wo $\cos 2k = 0$, fortwährend ab, während die Sinus zwischen diesen Grenzen fortwährend zunehmen. Wir können daher jetzt sagen, zwischen $x = 0$ und $x = 2k$ nimmt $\cos x$ fortwährend ab, $\sin x$ fortwährend zu.

### 99.

Man habe nun irgend eine positive Zahl $x$, so kann man dieselbe immer $= n . 2k + a$ setzen, wo $n$ eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, und $a$ eine Zahl welche zwischen 0 und $2k$ liegt, oder auch $= 0$ ist. Alsdann hat man

$$23) \quad e^{xi} = e^{(n . 2k + a)i} = \left(e^{2ki}\right)^n . e^{ai}$$
$$= (\cos 2k + \sin 2k . i)^n (\cos a + \sin a . i) = i^n (\cos a + \sin a . i)$$

aber auch

$$24) \quad e^{xi} = e^{(n . 2k + a)i} = \cos(n . 2k + a) + \sin(n . 2k + a)i$$

also

25) $\cos(n.2k+a)+\sin(n.2k+a)i = i^n(\cos a+\sin a.i)$

Es sind nun verschiedene in dieser Formel enthaltene Fälle zu unterscheiden.

I. Es sey $a=0$ also $x$ ein Vielfaches von $2k$, so ist $\cos a=1$, $\sin a=0$ also nach 23)

$$e^{2nki} = i^n = \cos 2nk + \sin 2nk.i$$

Ist $n$ eine durch 4 theilbare Zahl, also $n=4l$, so ist $i^n=1$ mithin

$$\cos 2nk = 1, \quad \sin 2nk = 0$$

Ist $n$ durch 2 und nicht durch 4 theilbar, also $n=4l+2$, so ist $i^n = -1$ und

$$\cos 2nk = -1, \quad \sin 2nk = 0$$

Ist $n$ eine ungerade Zahl, welche durch 4 getheilt den Rest 1 giebt, also $n=4l+1$, so ist $i^n=i$ und mithin

$$\cos 2nk = 0 \quad \sin 2nk = 1$$

Ist endlich $n$ ungerade und giebt durch 4 getheilt den Rest 3, also $n=4l+3$, so ist $i^n=-i$ und

$$\cos 2nk = 0 \quad \sin 2nk = -1$$

II. Es sey $a$ nicht Null. Dann folgt aus 25)

$$e^{(2nk+a)i} = \sin a.i^{n+1} + \cos a.i^n$$

Wie aber $n$ beschaffen sey, immer ist $\sin a.i^{n+1}+\cos a.i^n$ eine complexe Zahl, d. h. $e^{xi}$ ist eine complexe Zahl, sobald $x$ kein Vielfaches von $2k$ ist, während nach dem Vorhergehenden, wenn $x$ ein Vielfaches von $2k$ ist, $e^{xi}$ den reellen Werth 1 oder $-1$ hat je nachdem $x=8lk$ oder $(8l+4)k$ ist, und den rein imaginären Werth $i$ oder $-i$ je nachdem $x=(8l+2)k$ oder $x=(8l+6)k$

Je nachdem nun $n=4l$, $4l+1$, $4l+2$, $4l+3$ folgt weiter aus 25) dass $\cos(2nk+a)+\sin(2nk+a)i = \cos a + \sin ai$, oder $=i(\cos a+\sin a.i)$ oder $=-(\cos a+\sin a.i)$ oder endlich $=-i(\cos a+\sin a.i)$ ist. Mithin:

26)
$$\begin{cases} \text{wenn } n=4l, & \cos(2nk+a)=\cos a, \quad \sin(2nk+a)=\sin a \\ \text{wenn } n=4l+1, & (\cos 2nk+a)=-\sin a, \quad \sin(2nk+a)=\cos a \\ \text{wenn } n=4l+2, & \cos(2nk+a)=-\cos a, \quad \sin(2nk+a)=-\sin a \\ \text{wenn } n=4l+3, & \cos(2nk+a)=\sin a, \quad \sin(2nk+a)=-\cos a \end{cases}$$

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass *cos* $x$ und *sin* $x$ für jedes $x$, welches grösser als $2k$ ist, bekannt ist, sobald man die Werthe dieser Grössen für alle zwischen 0 und $2k$ liegenden Werthe von $x$ kennt und mithin, nach §. 98, dass man *cos* $x$ und *sin* $x$ für jeden Werth von $x$ kennt, sobald nur *cos* $x$ oder *sin* $x$ für alle zwischen 0 und $k$ liegenden Werthe unmittelbar berechnet sind. Aus 26) ergiebt sich, dass sowohl *cos* als *sin* wieder dieselben Werthe annehmen, sobald man von einer Zahl $a$ zu einer anderen übergeht, welche um $8lk$ grösser ist. Und umgekehrt müssen zwei Zahlen, welche denselben Cosinus und denselben Sinus haben, um $8lk$ verschieden seyn. Ist nemlich $\cos a = \cos b$ und $\sin a = \sin b$, so ist $e^{ai} = e^{bi}$ also $e^{(a-b)i} = 1$ und mithin, wenn $a$ die grössere Zahl ist, $a - b = 8lk$, da nur, wenn $x = 8lk$, $e^{xi} = 1$ seyn kann, wie oben bewiesen wurde. Zwischen 0 und $8k$ giebt es also keine zwei Zahlen, welche zugleich denselben Sinus und denselben Cosinus haben, von $8k$ an aber wiederholen sich fortwährend dieselben Werthe dieser Grössen in derselben Ordnung, so dass allgemein jede Zahl von der Form $8lk + a$ denselben Cosinus und denselben Sinus wie die Zahl $a$, welche kleiner als $8k$ ist, hat. Hiermit ist die in §. 96 ausgesprochene Eigenschaft, nach welcher Cosinus und Sinus periodische Funktionen sind, nachgewiesen. Die Zahl, welche wir im Vorhergehenden $8k$ genannt haben, wurde dort durch $2\pi$ bezeichnet und diese Bezeichnung soll von nun an immer gebraucht werden, so dass statt $k$ immer $\frac{\pi}{4}$ gesetzt wird. Es wird daher angemessen seyn, die vorhergehenden Ergebnisse, in dieser Bezeichnung ausgedrückt, nochmals zusammenzustellen. Es ist

$$27)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos(0)=1,\ \sin(0)=0,\ \cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1 \\ e^{2l\pi i}=1,\ \cos 2l\pi=1,\ \sin 2l\pi=0 \\ e^{(2l+1)\pi i}=-1,\ \cos(2l+1)\pi=-1,\ \sin(2l+1)\pi=0 \\ e^{(2l+\frac{1}{2})\pi i}=i,\ \cos(2l+\frac{1}{2})\pi=0,\ \sin(2l+\frac{1}{2})\pi=1 \\ e^{(2l+\frac{3}{2})\pi i}=-i,\ \cos(2l+\frac{3}{2})\pi=0,\ \sin(2l+\frac{3}{2})\pi=-1 \\ e^{(l.\frac{\pi}{2}+a)i}=i^{l}(\cos a+\sin a\,.\,i)=\cos(l.\frac{\pi}{2}+a)+\sin(l.\frac{\pi}{2}+a)i \end{array}\right.$$

$$28)\quad \begin{cases} \cos[2l\pi \pm a] = \cos a & \sin[2l\pi \pm a] = \pm \sin a \\ \cos[(2l+1)\pi \pm a] = -\cos a & \sin[(2l+1)\pi \pm a] = \mp \sin a \\ \cos[(2l+\tfrac{1}{2})\pi \pm a] = \mp \sin a & \sin[(2l+\tfrac{1}{2})\pi \pm a] = \cos a \\ \cos[(2l+\tfrac{3}{2})\pi \pm a] = \pm \sin a & \sin[(2l+\tfrac{3}{2})\pi \pm a] = -\cos a \end{cases}$$

Man findet namentlich

$$29)\qquad e^{2\pi i} = 1,\ e^{\pi i} = -1,\ e^{\frac{1}{2}\pi i} = i,\ e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$$

100.

Nach dem Vorhergehenden hat $e^{xi}$ für jeden zwischen 0 und $2\pi$ enthaltenen Werth von $x$ einen besonderen Werth, dagegen wiederholen sich, von $x = 2\pi$ an, dieselben Werthe in derselben Ordnung. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen dem reellen Potenzensysteme und dem imaginären. Im ersteren entspricht jedem besonderen $x$ ein besonderes $e^x$, da mit wachsendem $x$ auch $e^x$ wächst (§. 82), während $e^{xi}$ denselben Werth für alle Zahlen hat, die um ein Vielfaches von $2\pi$ verschieden sind.

Um ein vollständiges imaginäres Potenzensystem zu berechnen, d. h. zu jedem $x$ den Werth von $e^{xi}$ zu finden, wäre es nur noch nöthig die Werthe von $\cos x$ oder $\sin x$ für alle zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ liegenden Zahlen ursprünglich zu berechnen. Will man zu diesem Zwecke Tafeln anfertigen, so wird es natürlich nicht möglich sein, dass dieselben alle Zahlen enthalten, welche zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ liegen, da deren Anzahl unendlich gross ist, sondern man wird sich zunächst damit begnügen, von einer positiven Zahl $\alpha$, welche man so klein nehmen kann als man will, auszugehen, und für alle Vielfachen dieser Zahl $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$ ... die Cosinus oder Sinus zu berechnen, bis man an ein Vielfaches $n\alpha$ kommt, welches entweder $= \frac{\pi}{4}$ oder so beschaffen ist, dass $\frac{\pi}{4}$ zwischen $(n-1)\alpha$ und $n\alpha$ enthalten ist. Wir haben zwar noch nicht angegeben, wie gross $\frac{\pi}{4}$ ist und wie man dessen Werth

direkt berechnen kann, was erst später (Note IX) geschehen wird. An dieser Stelle wird es aber genügen zu bemerken, dass diese Zahl die einzige zwischen den Grenzen 0 und 1 ist, für welche Cosinus und Sinus denselben Werth haben und $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, man wird daher, indem man in den Formeln 4) oder 5) statt $x$ allmälich andere Zahlen setzt, sich sehr bald dem Werthe von $\frac{\pi}{4}$ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern können *) Um aber die Cosinus oder Sinus irgend eines Vielfachen von $\alpha$ zu finden, wird man diese Werthe nicht jedesmal wieder aus den Formeln 4) oder 5) unmittelbar berechnen müssen, sondern kann sich hierzu folgendes einfacheren Verfahrens bedienen. Aus 11) findet man, wenn man $x = y$ setzt,

$$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

also nach 8)

$$\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2$$

und mithin

$$(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Man gehe daher von einer Zahl aus, die nicht grösser als $\frac{\pi}{4}$ ist und deren Cosinus oder Sinus bekannt ist, also am einfachsten von $\frac{\pi}{4}$ selbst. Man setze diese Zahl $= 2x$, so findet man mittelst der vorhergehenden Formeln $(\cos x)^2 = (\cos \frac{\pi}{8})^2$ und $(\sin x)^2 = (\sin \frac{\pi}{8})^2$; sind diese Grössen berechnet, so findet man aus ihnen, oder vielmehr aus ihren (positiven) Qua-

*) Und zwar hat man für $x$ nur die Zahlen zu setzen, welche grösser als $\frac{1}{2}$ sind, da man weiss, dass $\frac{\pi}{2}$ zwischen 1 und 2 liegt (§. 98) also $\frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}$ ist.

dratwurzeln $\cos\frac{\pi}{8}$ und $\sin\frac{\pi}{8}$ vermöge derselben Formeln, $\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2$ und $\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2$. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, kann man daher $\cos\frac{\pi}{2k}$ und $\sin\frac{\pi}{2k}$ berechnen, wo $k$ jede beliebige Grösse überschreiten kann. Ist $k$ gross genug, so setze man $\frac{\pi}{2k} = \alpha$, man kennt also nun $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Um nun aus $\cos\alpha$ die Werthe von $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ u. s. w. oder aus $\sin\alpha$ die Werthe von $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ u. s. w. zu finden, setze man $x = n\alpha$, $y = \alpha$, dann geben die Formeln 11) und 12)

30) $\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha$

31) $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha$

Setzt man also $n = 1$, so findet man, vermittelst dieser Formeln, $\cos 2\alpha$ oder $\sin 2\alpha$ aus den bekannten $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, ebenso, wenn man dann $n = 2$ setzt, $\cos 3\alpha$ oder $\sin 3\alpha$ aus den bekannten $\cos 2\alpha$ und $\sin 2\alpha$ u. s. w.

Um nun auch noch Cosinus und Sinus einer Zahl zu finden, welche zwischen zwei Vielfachen von $\alpha$, etwa zwischen $k\alpha$ und $(k+1)\alpha$ enthalten sind, und also nicht in den Tafeln vorkommen, kann man sich einer annähernden Berechnung bedienen, welche mit der früher erläuterten Einrichtung der Proportionaltheile (§. 86) Aehnlichkeit hat.

Ist nemlich $\alpha$ so klein, dass der Einfluss der Glieder, welche eine höhere Potenz von $\alpha$ als die erste, enthalten, auf die aus 4) und 5) berechneten Werthe von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ weniger beträgt, als die Grenze, bis zu welcher man diese Werthe genau berechnen will, so kann man also in diesen Formeln die höheren Potenzen von $\alpha$ vernachlässigen und hat näherungsweise

$$\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = \alpha$$

Demnach ist auch näherungsweise nach 30) und 31)

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha - \alpha \sin n\alpha$$
$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha + \alpha \cos n\alpha$$

oder wenn man $n\alpha = a$, $\alpha \sin n\alpha = \alpha \sin a = d$, $\alpha \cos n\alpha = \alpha \cos a = D$ setzt,

$$\cos(a+\alpha) - \cos a = -d$$
$$\sin(a+\alpha) - \sin a = D$$

Setzt man aber $\frac{\alpha}{m}$ statt $\alpha$, wo $m$ irgend eine Zahl bedeutet, die grösser als 1 ist, so geht $d$ in $\frac{d}{m}$ und $D$ in $\frac{D}{m}$ über, und man hat

$$\cos\left(a+\frac{\alpha}{m}\right) = \cos a - \frac{\cos a - \cos(a+\alpha)}{m}$$

$$\sin\left(a+\frac{\alpha}{m}\right) = \sin a + \frac{\sin(a+\alpha) - \sin a}{m}$$

Um also $\cos\left(a+\frac{\alpha}{m}\right)$ zu finden hat man nur von $\cos a$ den $m$ten Theil der Differenz $\cos a - \cos(a+\alpha)$ abzuziehen, und um $\sin\left(a+\frac{\alpha}{m}\right)$ zu finden, hat man nur zu $\sin a$ die Differenz $\frac{\sin(a+\alpha)-\sin a}{m}$ zu addiren.

## 101.

In der That ist es aber nicht nöthig solche Tafeln für die Zwecke der Analysis zu berechnen, indem sie schon längst zu einem anderen Zwecke berechnet sind, allerdings in einer Form, welche noch eine einfache Rechnung nöthig macht, wenn man sie zu analytischem Gebrauch verwenden will. Es sind dies die trigonometrischen Tafeln, in welchen die Sinus und Cosinus der Bogen von 0° bis 45° angegeben sind und deren Einrichtung hier als bekannt vorausgesetzt werden darf. Setzt man den Halbmesser des Kreises, zu welchem diese Bogen gehören, der Einheit gleich und bezeichnet man die trigonometrischen Sinus und Cosinus durch *Sin* und *Cos*, um sie von den analytischen zu unterscheiden, so hat man, wie aus den Elementen der Trigonometrie bekannt ist,

$$(\mathrm{Cos}\, k)^2 + (\mathrm{Sin}\, k)^2 = 1$$
$$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Cos}\, y - \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Sin}\, y$$
$$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Sin}\, y$$
$$\mathrm{Cos}(0) = 1 \quad \mathrm{Sin}(0) = 0$$

Diese Gleichungen sind genau dieselben, wie wir sie für die analytischen *cos* und *sin* gefunden haben. Auch nehmen zwischen 0° und 45° die *Cos* ab und die *Sinus* zu wie *cos* und *sin* zwischen den Zahlen 0 und $\frac{\pi}{4}$. Für 45° sind *Cos* und *Sin* gleich und daher jede dieser Grössen $\frac{1}{\sqrt{2}}$, also

$$Cos\ 45^0 = cos\ \frac{\pi}{4},\quad Sin\ 45^0 = sin\ \frac{\pi}{4}$$

In Folge der erwähnten Uebereinstimmung der Formeln, kann man ebenso aus *Cos* 45° und *Sin* 45° wieder $Cos\ \frac{45^0}{2}$ und $Sin\ \frac{45^0}{2}$ finden, wie aus $cos\ \frac{\pi}{4}$ und $sin\ \frac{\pi}{4}$ oben $cos\ \frac{\pi}{8}$ und $sin\ \frac{\pi}{8}$ gefunden wurde, und man hat daher auch

$$Cos\ \frac{45^0}{2} = cos\ \frac{\pi}{8},\quad Sin\ \frac{45^0}{2} = sin\ \frac{\pi}{8}$$

und allgemein wird man $Cos\ \frac{45^0}{2^{k-2}}$ und $Sin\ \frac{45^0}{2^{k-2}}$ ebenso aus *Cos* 45° und *Sin* 45° ableiten, wie früher $cos\ \frac{\pi}{2^k}$ und $sin\ \frac{\pi}{2^k}$ aus $cos\ \frac{\pi}{4}$ und $sin\ \frac{\pi}{4}$ gefunden wurde. Mithin ist auch

$$Cos\ \frac{45^0}{2^{k-2}} = cos\ \frac{\pi}{2^k},\quad Sin\ \frac{45^0}{2^{k-2}} = sin\ \frac{\pi}{2^k}$$

oder wenn man wieder $\frac{\pi}{2^k} = \alpha$ setzt und $\varphi^0$ statt $\frac{45^0}{2^{k-2}}$ schreibt,

$$Cos\ \varphi^0 = cos\ \alpha,\quad Sin\ \varphi^0 = sin\ \alpha$$

Indem man also von $\varphi^0$ ausgeht, kann man nun wieder daraus $Cos\ 2\varphi^0$ und $Sin\ 2\varphi^0$, $Cos\ 3\varphi^0$ und $Sin\ 3\varphi^0$ allgemein $Cos\ n\varphi^0$ und $Sin\ n\varphi^0$ finden, bis man wieder an *Cos* 45° und *Sin* 45° kommt. Damit wären die trigonometrischen Tafeln berechnet. Hat man also bereits Tafeln dieser Art und man will *cos* und *sin* einer Zahl *m* finden, welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt, so hat man nur den Bogen $\beta^0$ zu suchen, der so beschaffen ist,

dass $Cos\ \beta^0 = cos\ m$ und $Sin\ \beta^0 = sin\ m$. Dieser Bogen muss aber derselbe Theil von 45° seyn, welcher $m$ von $\frac{\pi}{4}$ ist. Man hat daher nur die Proportion

$$m : \frac{\pi}{4} = \beta^0 : 45^0$$

aufzustellen, aus welcher

$$\beta = \frac{180^0}{\pi} . m$$

folgt.

Der Werth von $\pi$ als bekannt vorausgesetzt, sucht man in der Tafel $Cos\ \frac{180^0}{\pi} m$ und $Sin\ \frac{180^0}{\pi} m$ und die gefundenen Werthe sind zugleich $cos\ m$ und $sin\ m$.

Geometrische Betrachtungen, welche nicht hierher gehören, zeigen, dass in der That die Länge des Bogens von 45°, wenn man den Halbmesser der Einheit gleich setzt, genau durch die Zahl ausgedrückt wird, welche wir $\frac{\pi}{4}$ genannt haben, so dass also die Länge der ganzen Peripherie oder des Bogens von 360° genau $2\pi$ ist. Dies ist der Grund, aus welchem die kleinste Zahl, deren $cos$ und $sin$ gleich sind, durch $\frac{\pi}{4}$ bezeichnet wird, weil man die Länge der Peripherie, unter Voraussetzung, dass der Halbmesser $= 1$ ist, durch $2\pi$ zu bezeichnen pflegt (vgl. § 96).

Zum Schluss mag noch bemerkt werden, dass es keine Schwierigkeit hat, auch ein imaginäres Potenzensystem mit einer anderen reellen Basis, als die Zahl $e$, zu berechnen, da man immer $b = e^c$ setzen kann, mithin $b^{xi} = e^{cxi}$ ist.

## Zehntes Kapitel.

## Die imaginären Logarithmen, allgemeine Theorie der Wurzelausziehung.

---

### 102.

Da wir nachgewiesen haben, dass die Gleichung

1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \dots.$$

allgemein gültig ist, $x$ sey reell oder imaginär, und dass für jeden Werth von $x$ und $y$ die Gleichung

2) $$e^x \,.\, e^y = e^{x+y}$$

statt findet, aus welcher dann, wenn $k$ eine ganze Zahl ist, die Gleichung

3) $$(e^x)^k = e^{kx}$$

folgt, so können wir jetzt auch eine allgemeinere Erklärung des Wortes Logarithme geben indem wir sagen: ein natürlicher Logarithme einer Zahl $A$ ist jede (reelle oder imaginäre) Zahl $a$, welche der Gleichung

$$A = 1 + a + \frac{a^2}{1 \,.\, 2} + \dots.$$

genügt und es ist alsdann $A = e^a$. Wir können aber nachweisen, dass man jede (reelle oder imaginäre) Zahl $A$ in der Form $A = e^a$ darstellen kann, und zwar nicht blos auf eine, sondern auf unzählig viel verschiedene Weisen, woraus also folgt, dass jede Zahl unzählig viel verschiedene natürliche Logarithmen hat. Wir wollen von nun an jeden dieser Logarithmen durch das Zeichen *log* andeuten, so dass dieses Zeichen nun eine unzählige Menge Werthe umfassen wird. Aus der Gleichung $e^x \,.\, e^y = e^{x+y}$ folgt aber noch immer, da $x$ einer der Logarithmen von $e^x$ und $y$ einer der Logarithmen von $e^y$ ist, wenn man $e^x = A$, $e^y = B$ setzt,

4) $$\log (AB) = \log A + \log B$$

die schon aus der Arithmetik bekannte Grundformel der Logarithmentheorie, welche hier nur richtig gedeutet werden muss. Sie sagt hier nemlich, dass wenn man die Summe zweier Ausdrücke nimmt, von denen jeder irgend einer der Logarithmen einer gewissen Zahlengrösse ist, diese Summe auch irgend einer der Logarithmen des Produktes jener zwei Zahlengrössen seyn wird. In demselben Sinne hat man die Formel

5) $$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

welche aus $e^{x} . e^{-y} = e^{x-y}$ folgt, zu deuten, so wie die Formel

6) $\qquad log\,(A)^k = k\,log\,A$

die sich aus der Form. 3) ergiebt. Man darf aber nicht, wenn man einmal $log\,A = k$ und ein anderes Mal $log\,A = k'$ gefunden hat, daraus folgern dass $k = k'$, weil der Ausdruck $log\,A$ das eine Mal eine andere Bedeutung haben kann; als das andere Mal.

103.

Dass sich die Einheit auf unzählig viele Weisen als Potenz von $e$ darstellen lässt, und zwar in der Form $e^{2l\pi i} = 1$, wo $l$ jede ganze positive Zahl (Null eingeschlossen) bedeutet, wurde im vorhergehenden Kapitel (Form. 27) gefunden. Es ist noch hinzuzusetzen, dass $l$ auch jede ganze negative Zahl bedeuten kann. Denn da $e^{2l\pi i} . e^{-2l\pi i} = 1$ so folgt $e^{-2l\pi i} = 1$, wir wollen daher $e^{\pm 2l\pi i} = 1$ schreiben.

Ist nun $A$ eine reelle positive Zahl, so giebt es eine und nur eine reelle Zahl $\alpha$, welche der Gleichung $A = e^{\alpha}$ genügt (§. 82). Da nun $A = A.1$ so ist auch

$$A = e^{\alpha \pm 2l\pi i}$$

und

7) $\qquad log\,A = \alpha \pm 2l\pi i$

Hieraus folgt, dass jede der unzählig vielen in der Formel $\alpha \pm 2l\pi i$ enthaltenen Zahlen, wie $\alpha$, $\alpha + 2\pi i$, $\alpha - 2\pi i$, $\alpha + 4\pi i$, $\alpha - 4\pi i$ u. s. w., ein Logarithme von $A$ ist. Andere Zahlen als die in der Form $\alpha \pm 2l\pi i$ enthaltenen können aber nicht Logarithmen von $A$ seyn. Soll nemlich $\alpha + k$ ein Logarithme von $A$ seyn, also $e^{\alpha + k} = A$, so muss, wegen $e^{\alpha} = A$, auch $e^{k} = 1$ seyn und daher $k$ einer der in $\pm 2l\pi i$ enthaltenen Werthe.

Demnach hat eine reelle positive Zahl $A$ einen einzigen reellen Logarithmen und in sofern behält die frühere Behauptung (§. 82), dass eine solche Zahl nur einen Logarithmen hat, ihre Richtigkeit, als dort nur von reellen Logarithmen die Rede ist. Sie hat aber zugleich unzählig viel imaginäre Lo-

garithmen. Der reelle Logarithme ist offenbar der einfachste. Als speciellen Fall hat man

$$log\ 1 = \pm 2l\pi i$$

und als einfachsten Logarithmen

$$log\ 1 = 0$$

Ist $-A$ eine reelle negative Zahl, so setze man $-A = A . -1$, und, wie vorher, $A = e^{\alpha}$. Nun wurde früher $-1 = e^{(2l+1)\pi i}$ gefunden, oder wie wir jetzt allgemeiner sagen können, $-1 = e^{\pm(2l+1)\pi i}$, wo wieder für $l$ Null oder jede ganze positive Zahl gesetzt werden kann. Demnach ist

$$-A = e^{\alpha \pm (2l+1)\pi i}$$

8) $$log\,(-A) = \alpha \pm (2l+1)\pi i$$

Wie im vorhergehenden Falle kann auch hier bewiesen werden, dass nur die in der Form $\alpha \pm (2l+1)\pi i$ enthaltenen Zahlen Logarithmen von $-A$ seyn können. Eine negative reelle Zahl hat also keinen reellen Logarithmen, und in dieser Beschränkung bleibt die frühere Behauptung, dass sie keinen Logarithmen hat, (§. 82) richtig. Sie hat aber unzählig viele imaginäre Logarithmen; die einfachsten sind $\alpha + \pi i$ und $\alpha - \pi i$. Namentlich ist

$$log\ (-1) = \pm (2l+1)\pi i$$

und die einfachsten Werthe dieses Logarithmen sind $\pm \pi i$.

Ist $Ai$ eine rein imaginäre Zahl und setzt man, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung, $A = e^{\alpha \pm 2l\pi i}$ oder $A = e^{\alpha \pm (2l+1)\pi i}$, je nachdem $A$ positiv oder negativ ist, setzt man ferner (§. 99 Form. 29)

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$$

so folgt $Ai = e^{\alpha + [\frac{1}{2} \pm 2l]\pi i}$ oder $Ai = e^{\alpha + [\frac{1}{2} \pm (2l+1)]\pi i}$

Die rein imaginäre Zahl hat also keinen reellen Logarithmen, aber unzählig viel imaginäre, welche alle in der Form

9) $log\ Ai = \alpha + [\frac{1}{2} \pm 2l]\pi i$ oder $log\ Ai = \alpha + [\frac{1}{2} \pm (2l+1)]\pi i$

enthalten sind, je nachdem $A$ positiv oder negativ ist. Der einfachste Logarithme ist im ersten Falle $\alpha + \frac{1}{2}\pi i$, im zweiten $\alpha - \frac{1}{2}\pi i$. Namentlich hat man

$$log\, i = (\tfrac{1}{2} \pm 2k)\pi i$$

und als einfachsten Werth

$$log\, i = \tfrac{1}{2}\pi i$$

woraus die merkwürdige Formel

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{log\, i}{i}$$

folgt.

## 104.

Um die complexe Zahl $u + vi$ als Potenz von $e$ darzustellen, muss man sie zuerst in der Weise umformen, wie es schon in §. 89 geschehen ist. Man setzt $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = m$ und $u + vi = m\,(\frac{u}{m} + \frac{v}{m}\,i)$.

Seyen zuerst $u$ und $v$ beide positiv, so ist $\frac{u}{m}$ ein ächter, positiver Bruch. Da aber $cos\, x$ alle Werthe zwischen 1 und 0 durchläuft, wenn $x$ die Werthe zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ durchläuft, so giebt es zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ einen Werth $\varphi$ so beschaffen, dass $cos\, \varphi = \frac{u}{m}$. Hieraus folgt $\frac{v^2}{u^2+v^2} = 1 - \frac{u^2}{u^2+v^2}$ $= 1 - (cos\, \varphi)^2 = (sin\, \varphi)^2$. Da nun $v$ positiv ist, so hat man $\frac{v}{m} = sin\, \varphi$. Also $\frac{u}{m} + \frac{v}{m}\, i = cos\, \varphi + sin\, \varphi \,.\, i = e^{\varphi i}$. Setzt man noch $m = e^{\alpha}$ so ist

$$u + vi = e^{\alpha + \varphi i} = m(cos\, \varphi + sin\, \varphi i)$$

Ist $u$ positiv aber $v$ negativ, so setze man $-v$ statt $v$ indem man $v$ immer positiv nimmt, dann ist wieder $cos\, \varphi = \frac{u}{m}$ $= cos\, (-\varphi)$ und $\frac{-v}{m} = -sin\, \varphi = sin\, (-\varphi)$ (§. 96 Form. 17 u. 18) mithin

$$u - vi = m[cos\,(-\varphi) + sin\,(-\varphi)i] = e^{\alpha - \varphi i}$$

Ist $u$ negativ, so schreibe man statt dessen $-u$, und nehme wieder $v$ positiv, man wird also $-u \pm vi$ haben, d. h. $-1(u \mp vi)$.

Setzt man daher $-1 = e^{\pi i}$ so erhält man $-u \pm vi = e^{\alpha + (\pi \mp \varphi)i}$.
Setzt man aber $-1 = e^{-\pi i}$ so hat man $-u \pm vi = e^{\alpha - (\pi \pm \varphi)i}$
Die einfachsten Werthe erhält man also, wenn man $-u + vi = e^{\alpha + (\pi - \varphi)i}$ und $-u - vi = e^{\alpha - (\pi - \varphi)i}$ setzt, so dass man

$$-u \pm vi = e^{\alpha \pm (\pi - \varphi)i} = m\,[\cos(\pi - \varphi) \pm \sin(\pi - \varphi)\,i]$$
$$= m\,[\cos(\pm(\pi - \varphi)) + \sin(\pm(\pi - \varphi))i]$$

hat.

Es folgt aus dieser Erörterung der wichtige Satz, dass man jeden complexen Ausdruck $u + vi$, wo nun $u$ und $v$ positiv oder negativ seyn können, als Potenz von $e$ darstellen kann, nemlich

10) $$u + vi = e^{\alpha + \psi i}$$

oder auch in der Form

11) $$u + vi = m\,(\cos\psi + \sin\psi . i)$$

wo $m$ der Modul $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, $\cos\psi = \frac{u}{m}$, $\sin\psi = \frac{v}{m}$ ist und $\psi$ eine Zahl bedeutet welche zwischen $-\pi$ und $\pi$ liegt.

Bedenkt man aber ferner, dass man $u + vi = (u + vi).1 = (u + vi)e^{\pm 2l\pi i}$ setzen kann, so hat man noch allgemeiner

12) $$u + vi = e^{\alpha + (\psi \pm 2l\pi)i}$$

13) $$u + vi = m[\cos(\psi \pm 2l\pi) + \sin(\psi \pm 2l\pi)i]$$

Demnach hat jede complexe Zahl $u + vi$ unzählig viel Logarithmen, welche alle in der Form

14) $$\log(u + vi) = \alpha + (\psi \pm 2l\pi)i$$

enthalten sind, und von welchen der einfachste

15) $$\log(u + vi) = \alpha + \psi i$$

ist. Man kann auch hier wieder nachweisen, dass jede Zahl, welche ein Logarithme von $u + vi$ seyn soll, in der Form $\alpha + (\psi \pm 2l\pi)i$ enthalten seyn muss. Kann man nemlich $u + vi = e^{\alpha_1 + \psi_1 i}$ setzen, so hat man $e^{\alpha_1 + \psi_1 i} = e^{\alpha + \psi i}$ also $1 = e^{\alpha_1 - \alpha} . e^{(\psi_1 - \psi)i}$ und daher $\alpha_1 - \alpha = 0$, $e^{(\psi_1 - \psi)i} = 1$ d. h. $\alpha_1 = \alpha$, $\psi_1 = \psi \pm 2l\pi$.

105.

Man kann die Form, unter welcher wir $u + vi$ als Potenz von $e$ dargestellt haben, noch ein wenig abändern. Bekanntlich betrachtet die Trigonometrie ausser Sinus und Cosinus eines Bogens auch dessen Tangente. Die Tangente ist dem Sinus dividirt durch den Cosinus gleich, das Zeichen für die Tangente ist $tg$. Wir wollen diesen Begriff und dessen Zeichen auf die Analysis übertragen, indem wir sagen: unter der Tangente einer Zahl $\psi$ verstehen wir den Quotienten $\frac{\sin\psi}{\cos\psi}$ und schreiben $tg\,\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$. Es wird also $tg\,\psi$ immer einen bestimmten Werth haben, wie $\sin\psi$ und $\cos\psi$, ausser wenn $\psi = (\pm 2l + \frac{1}{2})\pi$ oder $\psi = [\pm(2l+1) + \frac{1}{2}]\pi$ weil dann $\sin\psi = \pm 1$, $\cos\psi = 0$, also $tg\,\psi = \frac{\pm 1}{0}$. Da $\sin(-\psi) = -\sin\psi$ und $\cos(-\psi) = \cos\psi$ so ist $tg(-\psi) = -tg\,\psi$; es können also nicht zwei dem Zahlenwerthe nach gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Zahlen dieselbe Tangente haben.

Ferner bezeichnet man in der Trigonometrie einen Kreisbogen (*Arcus*) durch *Arc*. Auch dieses Zeichen wollen wir auf die Analysis übertragen. Um eine Zahl anzudeuten, deren Tangente den Werth $\frac{v}{u}$ hat, schreiben wir $Arc\ tg\ \frac{v}{u}$. Dieser Ausdruck hat aber unzählig viel verschiedene Werthe, weil es unzählig viel Zahlen giebt, bei welchen der Quotient des *sin* dividirt durch den *cos* sowohl denselben Zahlenwerth als dasselbe Zeichen hat. In dieser Beziehung ist Folgendes zu bemerken. Wenn zwei Zahlen $\psi$ und $\psi'$ dem Zahlenwerthe und Zeichen nach gleiche Tangente haben, so muss auch $\sin\psi = \pm\sin\psi'$ und $\cos\psi = \pm\cos\psi'$ seyn, wo die oberen oder unteren Zeichen zugleich zu nehmen sind. Da nemlich

$$\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin\psi'}{\cos\psi'}$$

seyn soll, so muss jedenfalls

$$\sin\psi = n\sin\psi';\ \cos\psi = n\cos\psi'$$

seyn. Aber da

$$(\sin\psi)^2 + (\cos\psi)^2 = n^2[(\sin\psi')^2 + (\cos\psi')^2]$$

und zugleich

$$1 = (\sin\psi)^2 + (\cos\psi)^2 = (\sin\psi')^2 + (\cos\psi')^2$$

so folgt $$n^2 = 1$$

$$n = \pm 1$$

Soll also die Tangente positiv seyn, so müssen entweder $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\psi'$, $\cos\psi'$ zugleich positiv oder zugleich negativ seyn, oder es müssen $\sin\psi$ und $\cos\psi$ beide positiv oder beide negativ seyn, während zugleich $\sin\psi'$ und $\cos\psi'$ beide negativ oder beide positiv sind. Soll dagegen die Tangente negativ seyn, so müssen $\sin\psi$ und $\cos\psi$ entgegengesetzte Zeichen haben und zugleich entweder $\sin\psi$ und $\sin\psi'$ gleiche Zeichen so wie $\cos\psi$ und $\cos\psi'$ gleiche Zeichen, oder $\sin\psi$ und $\cos\psi'$ gleiche Zeichen, sowie $\cos\psi$ und $\sin\psi'$ gleiche Zeichen.

Nun ist (§. 99 Form. 28)

$$\cos(2l\pi + \varphi) = \cos\varphi;\ \sin(2l\pi + \varphi) = \sin\varphi$$

$$\cos[(2l+1)\pi + \varphi] = -\cos\varphi;\ \sin[(2l+1)\pi + \varphi] = -\sin\varphi$$

Alle Zahlen $\varphi$, $\varphi + \pi$, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 3\pi$ u.s.w. $\varphi - \pi$, $\varphi - 2\pi$, $\varphi - 3\pi$ u.s.w. (da man für $l$ alle positiven oder negativen ganzen Zahlen setzen darf) haben also dieselbe positive Tangente, die kleinste dieser Zahlen $\varphi$ liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, innerhalb welcher Grenzen *sin* und *cos*, mithin auch *tg*, alle möglichen Werthe durchläuft. Die allgemeine Form, in welcher alle diese Zahlen enthalten sind, ist $\varphi \pm l\pi$.

Ferner ist

$$\cos[2l\pi - \varphi] = \cos\varphi;\ \sin[2l\pi - \varphi] = -\sin\varphi$$

$$\cos[(2l+1)\pi - \varphi] = -\cos\varphi;\ \sin[(2l+1)\pi - \varphi] = \sin\varphi$$

Alle Zahlen $-\varphi$, $\pi - \varphi$, $2\pi - \varphi$, $3\pi - \varphi$ u. s. w. $-\pi - \varphi$, $-2\pi - \varphi$, $-3\pi - \varphi$ u. s. w. haben also dieselbe negative Tangente, die kleinste dieser Zahlen $-\varphi$ liegt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0, und die allgemeine Form, in welcher alle die Zahlen enthalten sind, ist $-\varphi \pm l\pi$.

Bezeichnet man daher die kleinste (positive oder negative) Zahl, deren Tangente einen bestimmten Werth $\frac{v}{u}$ hat,

ausschliesslich durch $Arc\ tg\ \frac{v}{u}$, während man durch $\overline{Arc}\ tg\ \frac{v}{u}$ irgend eine Zahl andeutet, deren Tangente diesen Werth hat, so ist

$$16)\qquad \overline{Arc}\ tg\ \frac{v}{u} = Arc\ tg\ \frac{v}{u} \pm l\pi$$

106.

Wendet man diese Betrachtung auf die Formel (§. 104)

$$u + vi = m\cos\psi + \sin\psi . i$$

an, wo $\cos\psi = \frac{u}{m}$, $\sin\psi = \frac{v}{m}$ so folgt $tg\,\psi = \frac{v}{u}$. Nennen wir daher die kleinste (positive oder negative) Zahl, deren Tangente $\frac{v}{u}$ ist, $\psi'$ so dass $\psi' = Arc\ tg\ \frac{v}{u}$, so hat man

$$tg\,\psi = tg\,\psi'$$

Da $\psi'$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist $\cos\psi'$ immer positiv. Ist $u$ positiv, so ist also auch $\cos\psi$ positiv und mithin

$$\cos\psi = \cos\psi';\ \sin\psi = \sin\psi'$$

woraus

$$u + vi = m(\cos\psi' + \sin\psi' . i)$$

folgt. Ist dagegen $u$ negativ, so ist

$$\cos\psi' = -\cos\psi,\ \sin\psi' = -\sin\psi$$

und

$$u + vi = -m(\cos\psi' + \sin\psi' . i)$$

Demnach hat man

$$u + vi = \pm m\, e^{\psi' i}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $u$ positiv oder negativ, also da $m = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\psi' = Arc\ tg\ \frac{v}{u}$

$$u + vi = \pm (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{i\,Arc\ tg\,\frac{v}{u}}$$

und wenn man mit $e^{\pm 2l\pi i} = 1$ multiplicirt, so kann man noch allgemeiner schreiben,

$$u + vi = \pm (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{i(Arc\ tg\,\frac{v}{u} \pm 2l\pi)}$$

woraus noch

17) $\log(u+vi) = \log \pm (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} + i \, Arc \, tg \frac{v}{u} \pm 2l\pi i$

und als einfachster Werth

18) $\log(u+vi) = \log \pm (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} + i \, Arc \, tg \frac{v}{u}$

folgt.

107.

Da im Vorhergehenden nachgewiesen worden ist, dass man alle Zahlenformen als Potenzen von $e$ ausdrücken, und dem entsprechend auch Logarithmen derselben angeben kann, so folgt hieraus, dass wir nun im Stande sind, alle Operationen, welche die Arithmetik mit Hülfe der Logarithmen an positiven Zahlen ausführt, nemlich das Multipliciren, Dividiren, Potenziren (mit ganzen Exponenten) und Wurzelausziehen, an jeder Zahlenform, mit Hülfe der Logarithmen, auszuführen. Da indessen die complexen Zahlen die anderen Zahlenformen als specielle Fälle in sich schliessen, so wird es genügen, nur diese zu betrachten.

Sind zwei complexe Zahlen $u+vi$ und $u'+v'i$ mit einander zu multipliciren, so kann das allerdings direkt geschehen, und man erhält das Produkt $uu' - vv' + (uv' + vu')i$. Will man aber die Logarithmen anwenden, so sey

$$u + vi = m(\cos \psi + \sin \psi i); \; u' + v'i = m'(\cos \psi' + \sin \psi' i)$$

oder, indem man wieder $m = e^{\alpha}$ und $m' = e^{\alpha'}$ setzt,

$$u + vi = e^{\alpha + \psi i}, \; u' + v'i = e^{\alpha' + \psi' i}$$

demnach $\log(u+vi) = \alpha + \psi i$; $\log(u' + v'i) = \alpha' + \psi' i$

und $\log[(u+vi)(u'+v'i)] = \alpha + \alpha' + (\psi + \psi')i$

mithin $(u+vi)(u'+v'i) = mm'[\cos(\psi+\psi') + \sin(\psi+\psi')i]$

Es wäre hier offenbar eine ganz nutzlose Mühe andere als die einfachsten Logarithmen der gegebenen Zahlen anzuwenden. Denn hätte man etwa,

$\log(u+vi) = \alpha + \psi i + 2l\pi$; $\log(u'+v'i) = \alpha' + \psi' i + 2l'\pi$ gesetzt

und demnach $(u+vi)(u'+v'i) =$

$$mm'[\cos(\psi + \psi' + 2(l+l')\pi) + \sin(\psi + \psi' + 2(l+l')\pi)i]$$

gefunden, so wäre dies kein anderes Resultat, als das vorher

auf einfacherem Wege gefundene, da $cos\,(\psi+\psi'+2(l+l')\pi) = cos(\psi+\psi')$ und $sin\,(\psi+\psi'+2(l+l')\pi) = sin\,(\psi+\psi')$.

Soll $u+vi$ durch $u'+v'i$ dividirt werden, so findet man unmittelbar den Quotienten $\frac{uu'-vv'}{u'^2+v'^2}+\frac{(uv'+u'v)}{u'^2+v'^2}i$. Behält man aber die vorhergehende Bezeichnung bei, so findet man mit Hülfe der Logarithmen $log\left[\frac{u+vi}{u'+v'i}\right] = \alpha-\alpha'+(\psi-\psi')i$ und hieraus $\frac{u+vi}{u'+v'i} = \frac{m}{m'}\,[cos\,(\psi-\psi') + sin\,(\psi-\psi')\,i]$. Auch hier wäre es wieder nutzlos andere als die einfachsten Logarithmen anzuwenden.

Ist $n$ eine ganze positive Zahl, so kann man $(u+vi)^n = u^n\,(1+\frac{v}{u}\,i)^n$ dadurch berechnen, dass man $(1+\frac{v}{u}\,i)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt (§. 92 Form. 1). Hier wird aber die Rechnung durch Anwendung der Logarithmen bedeutend abgekürzt. Denn aus $log\,(u+vi) = \alpha+\psi i$ folgt $log\,(u+vi)^n = n\,log\,(u+vi) = n\alpha+n\psi i$ also $(u+vi)^n = m^n\,(cos\,n\psi + sin\,n\psi\,.\,i)$.

Hieraus folgt ferner $(u+vi)^{-n} = \frac{1}{(u+vi)^n} = \frac{1}{m^n(cos\,n\psi+sin\,n\psi.i)}$ $= \frac{m^{-n}}{e^{n\psi i}} = m^{-n}\,e^{-n\psi i} = m^{-n}\,(cos\,n\psi - sin\,n\psi\,.\,i)$. Hier wiederholt sich wieder die Bemerkung, dass die Anwendung anderer als der einfachsten Logarithmen eine überflüssige Weitläufigkeit gewesen wäre, die zu demselben Resultate geführt hätte.

Anders aber ist es bei der Wurzelausziehung, deren Theorie nicht ohne Hülfe der Logarithmen, und zwar der Logarithmen in ihrer allgemeinsten Form, vollständig erledigt werden kann.

108.

Wir beginnen die Erörterung dieses wichtigen Gegenstandes mit der Betrachtung des einfachsten Falles, indem wir uns die Frage stellen, wie viele verschiedene Werthe der Aus-

druck $1^{\frac{1}{n}}$ haben kann. Bezeichnen wir vorläufig jeden Werth dieses Ausdruckes durch $x$, so hat man $x = 1^{\frac{1}{n}}$ oder $x^n = 1$, es sind also die verschiedenen Werthe von $x$ zu suchen, die dieser Gleichung Genüge leisten. Nun haben wir aber gefunden (§. 102) dass die verschiedenen Formen, unter welchen der Werth der Einheit dargestellt werden kann, durch die Gleichung

$$e^{\pm 2l\pi i} = 1$$

ausgedrückt werden, wo $l$ jede ganze positive Zahl (oder Null) bezeichnet. Setzen wir also $x^n = e^{\pm 2l\pi i}$ oder $x = e^{\frac{\pm 2l\pi i}{n}}$, so ist jeder in dem Ausdrucke $e^{\frac{\pm 2l\pi i}{n}}$ enthaltene Werth einer der gesuchten Werthe von $x$. Obgleich nun $l$ jede ganze positive Zahl bedeuten kann, so hat dennoch der Ausdruck $e^{\frac{\pm 2l\pi i}{n}}$ immer $n$ verschiedene Werthe und nicht mehr. Zunächst ist klar, dass nur diejenigen positiven Werthe von $l$, welche kleiner als $n$ sind, also die Werthe $0, 1, \ldots n-1$, verschiedene Werthe von $e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ hervorbringen können. Ist nemlich $l$ ein ganzes Vielfaches von $n$, etwa $kn$, so ist $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = e^{2k\pi i} = 1 = e^0$. Ist aber $l = kn + r$ und $r > 0$ und $< n$ so ist $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = e^{(2k\pi + \frac{2r\pi}{n})i} = e^{2k\pi i} . e^{\frac{2r\pi}{n} i} = e^{\frac{2r\pi i}{n}}$. Es müssen aber auch die $n$ verschiedenen Werthe $l = 0$, $l = 1 \ldots l = n - 1$, offenbar $n$ verschiedene Werthe für $e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ geben. Denn seyen $l = \alpha$ und $l = \beta$ zwei dieser Werthe und $\alpha > \beta$. Wäre $e^{\frac{2\alpha\pi i}{n}} = e^{\frac{2\beta\pi i}{n}}$ so hätte man $e^{\frac{2(\alpha-\beta)\pi i}{n}} = 1$, also müsste $\frac{\alpha - \beta}{n}$ eine ganze Zahl seyn, d. h. $\alpha - \beta \geqq n$, während $\alpha$ und $\beta$ beide kleiner als $n$ seyn sollen.

Der Ausdruck $1^{\frac{1}{n}}$ hat also jedenfalls $n$ verschiedene Werthe, er kann aber auch nicht mehr haben. Sollten nemlich noch andere Werthe vorhanden seyn, so könnten sie nur von den negativen Werthen von $l$ herrühren. Allein wenn man $l = -kn$ setzt, so ist $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = e^{-2k\pi i} = 1 = e^0$; ist dagegen $l = -(kn + r)$ und $r > 0$ und $< n$ so ist $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = e^{-\frac{2r\pi i}{n}} = e^{2\pi i} \cdot e^{-\frac{2r\pi i}{n}} = e^{\frac{2(n-r)\pi i}{n}}$. Nun ist $n - r$ einer der positiven Werthe von $l$ die zwischen $l = 0$ und $l = n$ enthalten sind, folglich erhält man keinen neuen Werth für $1^{\frac{1}{n}}$.

Der Ausdruck $1^{\frac{1}{n}}$ hat demnach immer $n$ verschiedene Werthe, die alle in der Form $e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ enthalten sind, wo für $l$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots n-1$ zu setzen ist. Diese Formel soll daher der generelle Werth der $n$ten Wurzel der Einheit heissen und durch $\overline{1^{\frac{1}{n}}}$ bezeichnet werden, während $e^0 = 1$, als einfachster Werth, der fundamentale heissen und durch $1^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet werden soll, so dass

$$19) \qquad \overline{1^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{2l\pi i}{n}}$$

$$20) \qquad 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

### 109.

In Beziehung auf die einzelnen Werthe sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle ist nur der Fundamentalwerth $e^0$, welcher $l = 0$ entspricht, reell, die übrigen $n - 1$ Werthe sind sämmtlich imaginär und lassen sich paarweise so ordnen, dass die Summe der Exponenten jedes Paares $2\pi i$ ist. Diese Paare

sind $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} = e^{\frac{-2\pi i}{n}}$, $e^{\frac{2.2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2(n-2)\pi i}{n}} = e^{\frac{-4\pi i}{n}}$ ... bis $e^{\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi i}{n}} = e^{\frac{-2\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi i}{n}}$ das Produkt jedes Paares ist $e^{2\pi i} = 1$. Mithin ist, wenn $n$ ungerade, das Produkt aller Werthe der $n$ten Wurzel der Einheit selbst wieder die Einheit.

Ist dagegen $n$ gerade, so giebt es neben dem Fundamentalwerthe noch einen reellen Werth, welcher in der Mitte der übrigen steht und $l = \frac{n}{2}$ entspricht, denn es ist dann $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = e^{\pi i} = -1$. Die übrigen $n-2$ Werthe dagegen sind wieder imaginär und können auch wieder paarweise so geordnet werden, dass das Produkt jedes Paares der Einheit gleich ist; man kann hier nemlich $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$ bis $e^{\frac{2\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi i}{n}}$ zusammenstellen. Wenn $n$ gerade, so ist mithin das Produkt aller Werthe der $n$ten Wurzel der Einheit der negativen Einheit gleich.

Da man von je zwei Werthen, die ein Paar ausmachen, den einen kennt, sobald der andere bekannt ist, so braucht man im ersten Falle, wenn man den Werth 1 absondert, von den übrigen $n-1$ Werthen nur die ersten $\frac{n-1}{2}$ Werthe zu berechnen, woraus sich die anderen $\frac{n-1}{2}$ Werthe von selbst ergeben. Ebenso wenn man im zweiten Falle, ausser den Werthen $\pm 1$, von den übrigen $n-2$ Werthen nur die ersten $\frac{n-2}{2}$ Werthe kennt, so folgen daraus die übrigen $\frac{n-2}{2}$ Werthe.

Da nun $e^{\frac{2l\pi i}{n}} = \cos\frac{2l\pi}{n} + \sin\frac{2l\pi}{n}\,i$, so sind im ersten

Falle die paarweise zusammengehörenden Werthe

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\,i \text{ und } \cos\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\,i$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n}\,i \text{ und } \cos\frac{4\pi}{n} - \sin\frac{4\pi}{n}\,i$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\cos(n-1)\frac{\pi}{n} + \sin(n-1)\frac{\pi}{n}.i \text{ und } \cos(n-1)\frac{\pi}{n} - \sin(n-1)\frac{\pi}{n}.i$$

Im zweiten Falle hat man dieselben Werthe, nur schliesst die Reihe der Paare mit

$$\cos(n-2)\frac{\pi}{n} + \sin(n-2)\frac{\pi}{n}.i \text{ und } \cos(n-2)\frac{\pi}{n} - \sin(n-2)\frac{\pi}{n}.i$$

## 110.

Im Allgemeinen lassen sich *cos* und *sin* nicht durch geschlossene algebraische Formeln ausdrücken, daher wird es auch nicht möglich seyn, wenn man vermittelst ihrer die Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{n}}}$ berechnet, diese in der Form solcher geschlossener Ausdrücke zu finden. In einzelnen Fällen ist dies allerdings möglich. Setzt man z. B. $n = 2$, sucht man also die Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{2}}}$, so muss man in $e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ für $l$ die Werthe 0 und 1 setzen, dies giebt $e^0$ und $e^{\pi i}$ oder 1 und $-1$ welches die schon aus der Arithmetik bekannten Werthe von $\sqrt{1}$ sind.

Setzt man $n = 3$, sucht man also die Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{3}}}$, so hat man statt $l$ die Werthe 0, 1, 2 zu setzen, man erhält also $e^0$, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ aber $e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\,i$; $e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\,i$. Nun ist $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}$ (§. 99 Form. 28). Die drei Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{3}}}$ sind also

$$1$$

$$-\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}i$$

$$-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}i$$

Wenn man aber in §. 95 Form. 16) für $n$ den Werth 3 setzt, so erhält man

$$(\cos a+\sin a.i)^3=\cos 3a+\sin 3a.i$$

also, nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$(\cos a)^3+3(\cos a)^2\sin a.i-3\cos a(\sin a)^2-(\sin a)^3 i=\cos 3a+\sin 3a.i$$

und hieraus

$$\cos 3a=(\cos a)^3-3\cos a(\sin a)^2$$
$$\sin 3a=3(\cos a)^2\sin a-(\sin a)^3$$

Setzt man nun $3a=\pi$ also $a=\frac{\pi}{3}$ so ist $\sin 3a=0$, also

$$0=3(\cos a)^2-(\sin a)^2$$

und da $(\sin a)^2=1-(\cos a)^2$

$$1=4(\cos a)^2$$

mithin

$$\cos\frac{\pi}{3}=\cos a=\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und demnach die drei Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{3}}}$

$$1$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Um die Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{4}}}$ zu finden muss man $l=0, 1, 2, 3$ setzen und erhält die Werthe $e^0=1$, $e^{\frac{2\pi}{4}i}=e^{\frac{1}{2}\pi i}=i$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{-\frac{1}{2}\pi i}=-i$, welches die vier aus der Arithmetik bekannten Werthe von $\sqrt[4]{1}$ sind.

111.

Der Ausdruck $1^{\frac{p}{n}}$ bezeichne die verschiedenen Werthe von $x$, welche der Gleichung $x^n = 1^p$ Genüge leisten. Sind $p$ und $n$ ganze positive Zahlen, so werden die Werthe von $1^{\frac{p}{n}}$ genau dieselben seyn wie die Werthe von $1^{\frac{1}{n}}$ sobald $p$ und $n$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Setzt man nemlich wieder $1 = e^{2lni}$ und $1^p = e^{2plni}$ also $1^{\frac{p}{n}} = e^{\frac{2plni}{n}}$ so ist klar dass $e^{\frac{2plni}{n}}$ keine anderen Werthe haben kann als $e^{\frac{2lni}{n}}$. Da nun der letztere Ausdruck, wie oben bewiesen wurde, $n$ Werthe hat, so kann auch $e^{\frac{2plni}{n}}$ keine anderen und nicht mehr als diese $n$ Werthe haben. Andererseits muss wirklich $e^{\frac{2plni}{n}}$, wenn man statt $l$ die Zahlen $0, 1 \ldots n-1$ setzt, $n$ verschiedene Werthe geben. Denn bezeichnen $h$ und $h'$ zwei Zahlen, die kleiner als $n$ sind und es wäre $e^{\frac{2hpni}{n}} = e^{\frac{2h'pni}{n}}$, so sey $h > h'$, also wäre $e^{\frac{2(h-h')pni}{n}} = 1$, d. h. $\frac{(h-h')p}{n}$ eine ganze Zahl, was nicht seyn kann, da $h-h'$ kleiner als $n$ ist und mithin nicht durch $n$ theilbar, und $p$ keinen gemeinschaftlichen Faktor mit $n$ hat. Hieraus folgt, dass die Werthe von $1^{\frac{p}{n}}$ genau dieselben wie die Werthe von $1^{\frac{1}{n}}$ sind, sobald $p$ und $n$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben.

Wäre dagegen $p = ks$, $n = qs$ und $s$ der grösste gemeinschaftliche Faktor der Zahlen $p$ und $n$, so wäre $e^{\frac{2lpni}{n}} = e^{\frac{2klni}{q}}$. Dieser letztere Ausdruck hat aber, da $k$ und $q$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, dieselben Werthe wie $e^{\frac{2lni}{q}}$. Dem-

nach hat in diesem Falle $1^{\frac{p}{n}}$ nur $q$ verschiedene Werthe und zwar dieselben wie $1^{\frac{1}{q}}$.

In der Gleichung $x^n = 1^p$ darf man also nur dann 1 statt $1^p$ setzen, wenn $p$ und $n$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, im entgegengesetzten Falle sind die zwei Gleichungen $x^n = 1$ und $x^n = 1^p$ wohl zu unterscheiden. Wir haben z. B. oben gefunden dass $1^{\frac{1}{4}}$ die Werthe $1, -1, i, -i$ hat, es sind dies also die 4 Werthe von $x$ welche der Gleichung $x^4 = 1$ entsprechen. Hätte man aber $x^4 = 1^2$ d. h. wären die Werthe von $1^{\frac{2}{4}}$ zu finden, so wären dies dieselben wie die Werthe von $1^{\frac{1}{2}}$ also 1 und $-1$. In der That dürfte man hier nicht $x = \pm i$ setzen, weil daraus $x^2 = -1$ folgte, während $x^2 = 1$ seyn muss, wenn $x^4 = (x^2)^2 = 1^2$ ist.

112.

Es ist nun leicht die allgemeine Theorie der Wurzelausziehung auf den so eben betrachteten einzelnen Fall zurückzuführen. Bezeichnet nemlich $A$ irgend einen (reellen oder imaginären) Zahlenausdruck und $A^{\frac{p}{n}}$ die verschiedenen Werthe des $x$, welche der Gleichung $x = A^{\frac{p}{n}}$ d. h. $x^n = A^p$ Genüge leisten, so ist es immer leicht wenigstens einen Werth von $x$ zu finden. Denn da man immer $A$ als Potenz von $e$ darstellen kann (§. 102), so dass etwa $A = e^a$, so ist auch $e^{\frac{ap}{n}}$ ein Werth von $x$. Man bezeichne diesen Werth durch $W$; giebt es nun noch andere Werthe von $x$, so sey ein solcher $W' = J.W$. Man hat mithin zugleich

$$W^n = A^p$$

$$W^n . J^n = A^p$$

also muss $J^{n} = 1^{p}$ und $J = 1^{\frac{p}{n}}$ seyn. Hieraus folgt demnach

21) $$A^{\frac{p}{n}} = W.1^{\frac{p}{n}}\ *)$$

und, wenn man zur Einfachheit annimmt, dass $p$ und $n$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, was im Folgenden immer geschehen soll,

22) $$A^{\frac{p}{n}} = W.1^{\frac{1}{n}}$$

Am bequemsten wird es immer seyn, für $W$ den möglichst einfachen Werth zu nehmen.

113.

Wenden wir diese Theorie auf die einzelnen Formen an, welche $A$ annehmen kann.

I. Ist $A$ eine reelle positive Zahl, so setze man $A = e^{\alpha}$, wo $\alpha$ reell ist (§. 103) und daher $W = e^{\frac{\alpha p}{n}}$, worunter der positive reelle Werth von $\sqrt[n]{e^{\alpha p}} = \sqrt[n]{A^{p}}$ verstanden werden soll, welchen die Arithmetik angiebt und den wir als den einfachsten betrachten. Man hat daher

$$A^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{A^{p}}.1^{\frac{1}{n}}$$

$A^{\frac{p}{n}}$ enthält also ebenso wie $1^{\frac{1}{n}}$ eine Anzahl $n$ verschiedener Werthe und unter diesen einen oder zwei reelle, je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist.

Hiermit ist zugleich die in §. 65 gestellte Frage beantwortet. Der Ausdruck $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ in seiner allgemeinsten Be-

*) Der Sinn dieser Gleichung ist so zu verstehen, dass man alle einzelnen Werthe von $A^{\frac{p}{n}}$ erhält, indem man alle einzelnen Werthe von $W.1^{\frac{p}{n}}$ berechnet.

deutung hat, wenn $p$ und $q$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, $q$ verschiedene Werthe, von welchen $q-1$ oder $q-2$ imaginär sind, je nachdem $q$ ungerade oder gerade ist. Einen derselben, nemlich den positiven reellen Werth $\sqrt[q]{(1+x)^p}$, welchen die Arithmetik giebt, findet man mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes, und aus diesem findet man sämmtliche Werthe, indem man ihn mit den verschiedenen in $\overline{1^{\frac{p}{q}}}$ enthaltenen Werthen multiplicirt.

II. Sey $A$ eine negative reelle Zahl und zwar setze man zuerst $A=-1$. Die einfachste Form, unter welcher man $-1$ als Potenz von $e$ darstellen kann, ist $-1=e^{\pm\pi i}$. Man setze $-1=e^{\pi i}$ und $W=e^{\frac{p\pi i}{n}}$ so ist

$$\overline{(-1)^{\frac{p}{n}}}=e^{\frac{p\pi i}{n}}.\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

Ist $p$ eine gerade Zahl, so ist $e^{p\pi i}=1$, wir können daher für $W$ die Einheit nehmen, indem diese einer der Werthe von $\overline{1^{\frac{1}{n}}}$ ist. In diesem Falle ist also

$$\overline{(-1)^{\frac{p}{n}}}=\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

Ist $p$ eine ungerade Zahl, so ist $e^{p\pi i}=-1$, also ist $e^{\frac{p\pi i}{n}}$ einer der Werthe von $\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}$. Wollte man aber $\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}$ finden, so könnte man ebendeswegen $W=e^{\frac{p\pi i}{n}}$ setzen, und hätte demnach auch

$$\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{p\pi i}{n}}.\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

In diesem Falle ist also

$$\overline{(-1)^{\frac{p}{n}}}=\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}$$

Man kann beide Fälle in einen zusammenfassen, indem man schreibt

$$23)\qquad \overline{(-1)^{\frac{p}{n}}} = \overline{\left[(-1)^p\right]^{\frac{1}{n}}}$$

Die Werthe von $\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}$ lassen sich noch einfacher ausdrücken, als es hier eben geschah. Geht man nemlich von der Gleichung $-1 = e^{\pi i}$ aus und setzt $W = e^{\frac{\pi i}{n}}$ so ist

$$\overline{(-1)^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

Benutzt man die Entwickelungen des §. 109, so sieht man, dass hier wieder zwei Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle sind die verschiedenen Werthe

$$e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot 1$$
$$e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{n}}$$
$$e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-4\pi i}{n}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{n-1}{n}\pi i} \quad \text{und} \quad e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-(n-1)}{n}\pi i}$$

wofür man auch, indem man den reellen Werth $e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{n-1}{n}\pi i} = e^{\pi i} = -1$ voransetzt, schreiben kann

$$-1$$
$$e^{\frac{\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{\pi i}{n}}$$
$$e^{\frac{3\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{3\pi i}{n}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{\frac{n-1}{n}\pi i} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{(n-1)}{n}\pi i}$$

Im zweiten Falle erhält man ebenso

$$e^{\frac{\pi i}{n}} . 1 \text{ und } e^{\frac{\pi i}{n}} . -1$$

$$e^{\frac{\pi i}{n}} . e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ und } e^{\frac{\pi i}{n}} . e^{\frac{-2\pi i}{n}}$$

. . . . . . . . .

$$e^{\frac{\pi i}{n}} . e^{\frac{n-2}{n}\pi i} \text{ und } e^{\frac{\pi i}{n}} . e^{\frac{-(n-2)}{n}\pi i}$$

Setzt man $-1 = e^{-\pi i}$ und daher $e^{\frac{\pi i}{n}} . -1 = e^{\frac{-(n-1)\pi i}{n}}$ so kann man diese Werthe paarweise in folgender Ordnung schreiben

$$e^{\frac{\pi i}{n}} \text{ und } e^{\frac{-\pi i}{n}}$$

$$e^{\frac{3\pi i}{n}} \text{ und } e^{\frac{-3\pi i}{n}}$$

. . . . . . .

$$e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}} \text{ und } e^{\frac{-(n-1)\pi i}{n}}$$

und man sieht zugleich, dass unter den Werthen von $(-1)^{\frac{1}{n}}$ ein reeller ist, nemlich $-1$, wenn $n$ ungerade ist, während alle Werthe imaginär sind, wenn $n$ gerade ist. Schreibt man statt der Exponentialgrössen ihre durch *cos* und *sin* ausgedrückten Werthe, so kann man auch sagen: je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist, sind die Werthe von $(-1)^{\frac{1}{n}}$

$$-1$$

$$\cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n} . i \text{ und } \cos\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n} . i$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} . i \text{ und } \cos\frac{3\pi}{n} - \sin\frac{3\pi}{n} . i$$

. . . . . . . . .

$$\cos\frac{n-2}{n}\pi + \sin\frac{n-2}{n}\pi . i \text{ und } \cos\frac{n-2}{n}\pi - \sin\frac{n-2}{n}\pi . i$$

oder

$$\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\,.\,i \text{ und } \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\,.\,i$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\,.\,i \text{ und } \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\,.\,i$$

. . . . . . . . . .

$$\cos\frac{n-1}{n}\pi+\sin\frac{n-1}{n}\pi\,.\,i \text{ und } \cos\frac{n-1}{n}\pi-\sin\frac{n-1}{n}\pi\,.\,i$$

Es bedeute nun $A$ irgend eine negative reelle Zahl, welche man $= -e^{\alpha}$ setze, wo $\alpha$ wieder reell seyn soll. Einer der Werthe von $A^{\frac{p}{n}}$ ist daher $e^{\frac{\alpha p}{n}}\,.\,e^{\frac{p\pi i}{n}}$ und wenn man diesen Werth $= W$ setzt (indem man wieder unter $e^{\frac{\alpha p}{n}}$ den reellen positiven Werth von $\sqrt[n]{(-A)^p}$ versteht), so findet man

$$\overline{A^{\frac{p}{n}}} = W\,.\,\overline{1^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{(-A)^p}\,.\,e^{\frac{p\pi i}{n}}\,.\,\overline{1^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{(-A)^p}\;\overline{(-1)^{\frac{p}{n}}}$$

III. Ist $A$ eine rein imaginäre Zahl $= \pm e^{\alpha}\,.\,i$, so setze man je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, $A = e^{\alpha+\frac{1}{2}\pi i}$ oder $A = e^{\alpha+\frac{3}{2}\pi i}$ und $W = e^{\frac{\alpha p}{n}+\frac{1}{2}\frac{p\pi i}{n}}$ oder $W = e^{\frac{\alpha p}{n}+\frac{3}{2}\frac{p\pi i}{n}}$ alsdann ist wieder

$$\overline{A^{\frac{p}{n}}} = W\,.\,\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

IV. Sey $A$ eine complexe Zahl $= u + vi$, so ist (§. 104, Form. 10)

$$u + vi = e^{\alpha+\psi i}$$

oder, wenn man wieder $e^{\alpha} = m = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$ setzt,

$$u + vi = m\,.\,e^{\psi i}$$

Einer der Werthe von $\overline{A^{\frac{p}{n}}}$ ist also $m^{\frac{p}{n}}\,.\,e^{\frac{p\psi i}{n}}$ wo man wieder unter $m^{\frac{p}{n}}$ den reellen positiven Werth von $\sqrt[n]{m^p}$ versteht,

und $e^{\frac{p\psi}{n}i} = \cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i$ ist; setzt man daher

$W = m^{\frac{p}{n}}(\cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i)$ so ist

24) $\overline{A^{\frac{p}{n}}} = \overline{(u+vi)^{\frac{p}{n}}} = m^{\frac{p}{n}}(\cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i) \cdot \overline{1^{\frac{1}{n}}}$

Setzt man statt $u+vi$ seinen Werth $m(\cos\psi + \sin\psi \cdot i)$ so hat man also

$$\overline{[m(\cos\psi+\sin\psi \cdot i)]^{\frac{p}{n}}} = m^{\frac{p}{n}}(\cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i)\,\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

und wenn man $m = 1$ setzt,

$$\overline{(\cos\psi + \sin\psi \cdot i)^{\frac{p}{n}}} = (\cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i)\,\overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

also wenn $(\cos\psi + \sin\psi \cdot i)^{\frac{p}{n}}$ den einfachsten der in der Formel $\overline{(\cos\psi + \sin\psi \cdot i)^{\frac{p}{n}}}$ enthaltenen Werthe bezeichnet, nemlich denjenigen, welchen man erhält wenn man $1^{\frac{1}{n}} = 1$ setzt, so folgt

25) $(\cos\psi + \sin\psi \cdot i)^{\frac{p}{n}} = \cos\frac{p\psi}{n} + \sin\frac{p\psi}{n}i$

d. h. unter dieser Voraussetzung ist

$$(e^{\psi i})^{\frac{p}{n}} = e^{\frac{p}{n}\psi i}$$

oder wenn man $\frac{p}{n} = k$, $\psi i = x$ setzt

26) $(e^x)^k = e^{kx}$

Die Gleichung 3) des §. 102 gilt also auch noch für gebrochene rationale Werthe von $k$, sobald man unter $(e^x)^k$ den einfachsten Werth dieses Ausdrucks versteht und man kann hieraus, wie es in einem ähnlichen Falle früher geschah (§. 57),

weiter ableiten, dass diese Gleichung auch dann noch ihre Gültigkeit behält, wenn $k$ irrational ist. Versteht man nemlich dann unter $(e^x)^k$ den Werth, welchem man unbegrenzt nahe kommt, indem man den einfachsten Werth von $\overline{(e^x)^h}$ berechnet, wo $h$ eine rationale Zahl bedeutet, die sich von $k$ um weniger als irgend eine angebbare Grösse unterscheidet, so sey

$$(e^x)^k = e^{kx} + D$$

$$\text{nun ist} \quad (e^x)^h = e^{hx}$$

$$\text{also} \quad D = (e^x)^k - (e^x)^h - (e^{kx} - e^{hx})$$

Da nun, wenn $h$ sich unbegrenzt dem $k$ nähert, sowohl $(e^x)^k - (e^x)^h$ als $e^{kx} - e^{hx}$ sich unbegrenzt der Null nähert, so ist auch $D = 0$ und $(e^x)^k = e^{kx}$. Setzt man wieder $e^x = \cos\psi + \sin\psi . i$ so ist also nun nachgewiesen, dass die Gleichung

$$27) \quad (\cos\psi + \sin\psi . i)^k = \cos k\psi + \sin k\psi . i$$

für alle reellen Werthe von $k$ statt hat, sobald man unter $(\cos\psi + \sin\psi . i)^k$ den einfachsten in $\overline{(\cos\psi + \sin\psi i)^k}$ enthaltenen Werth versteht, also denjenigen, welchem man unbegrenzt nahe kommt, wenn man den einfachsten Werth von $\overline{(\cos\psi + \sin\psi . i)^h}$, d. h. $\cos h\psi + \sin h\psi . i$ berechnet.

Setzt man in Formel 24) $1 + u$ statt $u$, so geht sie in

$$28) \quad \overline{A^{\frac{p}{n}}} = \overline{(1 + u + vi)^{\frac{p}{n}}} = m^{\frac{p}{n}} \left(\cos\frac{p}{n}\psi + \sin\frac{p}{n}\psi . i\right) \overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

über, wo aber nun $m = [(1+u)^2 + v^2]^{\frac{1}{2}}$, $\cos\psi = \dfrac{1+u}{[(1+u)^2+v^2]^{\frac{1}{2}}}$, $\sin\psi = \dfrac{v}{[(1+u)^2 + v^2]^{\frac{1}{2}}}$ ist. Insofern also $x = u + vi$ und $\overline{(1 + x)^{\frac{p}{n}}}$ jeden Werth bezeichnen soll, dessen $n$te Potenz den Werth $(1 + x)^p$ hat, giebt es $n$ solcher Ausdrücke und damit ist die in §. 92 angedeutete Frage beantwortet. Da

aber dort zugleich gefunden wurde, dass einer dieser Ausdrücke, sobald $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}<1$, für jeden Werth von $\frac{p}{n}$ durch die Reihe $\Sigma \overset{p}{\underset{n}{}}{}_r \mathfrak{B} x^r$ dargestellt werden kann, so entsteht nun die Frage, welchem der $n$ verschiedenen Ausdrücke jedesmal die Reihe gleich ist. Als $x$ eine reelle Zahl bedeutete, war die Beantwortung dieser Frage aus einfachen Betrachtungen abzuleiten (§. 65). Für ein imaginäres $x$ aber giebt es bis jetzt keinen Weg zur gründlichen Beantwortung dieser Frage, welcher nicht auf Betrachtungen führt, die in einen höheren Theil der Analysis (in die Differentialrechnung) gehören, weswegen wir hier nicht darauf eingehen. Weitere Erörterungen findet man aber in Note VII.

## Elftes Kapitel.

## Anwendungen des Vorhergehenden, besonders auf Summirung von Reihen. Sinus und Cosinus imaginärer Zahlen.

---

### 114.

In §. 89 wurde gezeigt, dass man jeden Ausdruck $u_r+v_r i$ in die Form $m_r(U_r+V_r i)$ verwandeln kann, wo $m_r=(u_r^2+v_r^2)^{\frac{1}{2}}$, $U_r=\frac{u_r}{m_r}$, $V_r=\frac{v_r}{m_r}$. Aus Form 11) des §. 102 folgt aber, dass $U_r=\cos\psi_r$, $V_r=\sin\psi_r$, wo $\psi_r$ eine zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegende Zahl bedeutet, also

$$u_r+v_r i=m_r(\cos\psi_r+\sin\psi_r i)$$

Demnach kann man statt der Reihe 3) des §. 89 auch schreiben

1) $\quad m_1(\cos\psi_1+\sin\psi_1 . i)+m_2(\cos\psi_2+\sin\psi_2 . i)+\ldots,$

während die Modulreihe noch immer

2) $\quad m_1+m_2+\ldots.$

ist. Die Modulreihe wird aber convergiren oder divergiren, je nachdem (abgesehen vom Zeichen) $\frac{m_r}{m_{r-1}}$ um ein Angebbares

kleiner oder grösser als die Einheit ist. Ist dagegen $\lim \frac{m_r}{m_{r-1}} = 1$, so convergirt die Reihe 1) wenn die Reihe 2) convergirt, während wenn die Reihe 2) divergirt, die Reihe 1) convergiren oder divergiren kann.

Hat man eine Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots .$$

in welcher die Coefficienten $a_0, a_1 \ldots$ reelle Werthe haben, $x$ dagegen imaginär seyn soll, und man setzt $x = m(\cos\psi + \sin\psi . i)$ also $x^r = m^r(\cos r\psi + \sin r\psi . i)$ so geht sie in

$$a_0 + a_1 m(\cos\psi + \sin\psi . i) + a_2 m^2 (\cos 2\psi + \sin 2\psi . i) + \ldots$$
$$+ a_r m^r (\cos r\psi + \sin r\psi . i) + \ldots$$

über. Diese Reihe wird also convergiren oder divergiren, je nachdem der Zahlenwerth von $\frac{a_r m}{a_{r-1}}$ um ein Angebbares kleiner oder grösser als die Einheit ist.

## 115.

Da die Gleichung

$$\frac{x}{1-x} = x + \frac{x}{1-x}$$

unabhängig von den besonderen Werthen des $x$, also auch für imaginäre Werthe statt hat, und aus derselben (§. 47) die Gleichung

$$x + x^2 + \ldots\ldots + x^{r-1} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^r}{1-x}$$

abgeleitet worden ist, so gilt auch letztere für imaginäre Werthe des $x$. Schreibt man statt derselben

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{r-1} = 1 + \frac{x}{1-x} - \frac{x^r}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^r}{1-x}$$

und setzt wieder

$$x = m(\cos\psi + \sin\psi . i)$$

so hat man mithin

3) $$1 + m(\cos\psi + \sin\psi . i) + m^2(\cos 2\psi + \sin 2\psi . i) + \ldots$$
$$+ m^{r-1}(\cos(r-1)\psi + \sin(r-1)\psi . i) = \frac{1}{1 - m(\cos\psi + \sin\psi . i)}$$
$$- \frac{m^r(\cos r\psi + \sin r\psi . i)}{1 - m(\cos\psi + \sin\psi . i)}$$

So lange also $r$ einen endlichen Werth hat, lässt sich der Werth der Reihe 3) einfach ausdrücken. Lässt man aber $r$ unbegrenzt wachsen, wodurch die Reihe 3) in eine unendliche übergeht, und ist zugleich $m < 1$, so ist $lim\, m^r = 0$, während $cos\, r\psi$ und $sin\, r\psi$, was auch $r$ bedeuten mag, nie grösser als 1 werden können. Mithin ist $Lim\, m^r (cos\, r\psi + sin\, r\psi . i) = 0$, d. h. sobald $m < 1$, ist die Reihe

4) $1 + m\,(cos\,\psi + sin\,\psi . i) + m^2 (cos\,2\psi + sin\,2\psi . i) + \ldots$

convergent und hat den Werth $\dfrac{1}{1 - m\,(cos\,\psi + sin\,\psi . i)}$

$$= \frac{1 - m\,(cos\,\psi - sin\,\psi . i)}{(1 - m\,cos\,\psi)^2 + (m\,sin\,\psi)^2} = \frac{1 - m\,(cos\,\psi - sin\,\psi . i)}{1 - 2m\,cos\,\psi + m^2}$$

Trennt man hier, auf beiden Seiten der Gleichung, das Reelle vom Imaginären, so findet man

5) $$1 + m\,cos\,\psi + m^2\,cos\,2\psi + \ldots = \frac{1 - m\,cos\,\psi}{1 - 2m\,cos\,\psi + m^2}$$

6) $$sin\,\psi + m\,sin\,2\psi + m^2\,sin\,3\psi + \ldots = \frac{sin\,\psi}{1 - 2m\,cos\,\psi + m^2}$$

Ist dagegen $m > 1$ so wächst $m^r$ über jede angebbare Grenze während $(cos\,r\psi + sin\,r\psi . i)$ immer einen bestimmten (reellen oder imaginären) Werth behält; in diesem Falle divergirt die Reihe 4).

### 116.

Auf ähnliche Weise kann auch der Werth der endlichen imaginären Reihe

7) $m\,(cos\,\psi + sin\,\psi . i) + m^2\,[cos\,(\psi + \alpha) + sin\,(\psi + \alpha)\,i] \ldots$
$+ m^r\,[cos\,(\psi + (r-1)\alpha) + sin\,(\psi + (r-1)\alpha)\,i]$

gefunden werden. Denn da allgemein (§. 95 Form. 15)

$cos\,(\psi + k\alpha) + sin\,(\psi + k\alpha)\,i = (cos\,\psi + sin\,\psi . i)\,(cos\,k\alpha + sin\,k\alpha . i)$

so kann man diese Reihe auch in der Form

$m\,(cos\,\psi + sin\,\psi . i)\,[1 + m\,(cos\,\alpha + sin\,\alpha . i) + m^2 (cos\,2\alpha + sin\,2\alpha . i) + \ldots$
$+ m^{r-1}\,(cos\,(r-1)\,\alpha + sin\,(r-1)\,\alpha . i)]$

schreiben. Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$1 + m\,(cos\,\alpha + sin\,\alpha . i) + \ldots + m^{r-1}\,(cos\,(r-1)\,\alpha + sin\,(r-1)\,\alpha . i)$$
$$= \frac{1}{1 - m\,(cos\,\alpha + sin\,\alpha . i)} - \frac{m^r\,(cos\,r\alpha + sin\,r\alpha . i)}{1 - m\,(cos\,\alpha + sin\,\alpha . i)}$$

also ist der Werth der Reihe 7)

$$m(\cos\psi+\sin\psi.i)\left[\frac{1}{1-m(\cos\alpha+\sin\alpha.i)}-\frac{m^r(\cos r\alpha+\sin r\alpha.i)}{1-m(\cos\alpha+\sin\alpha.i)}\right]$$

$$=\frac{m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi)+[(m\sin\psi-m^{r+1}\sin(r\alpha+\psi)]i)}{1-m(\cos\alpha+\sin\alpha.i)}$$

$$=\frac{(1-m\cos\alpha+m\sin\alpha.i)(m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi)+[m\sin\psi-m^{r+1}\sin(r\alpha+\psi)]i)}{(1-m\cos\alpha)^2+(m\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{1-m\cos\alpha)(m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi))-m\sin\alpha(m\sin\psi-m^{r+1}\sin(r\alpha+\psi))}{1-2m\cos\alpha+m^2}$$

$$+\frac{m\sin\alpha(m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi))+(1-m\cos\alpha)(m\sin\psi-m^{r+1}\sin(r\alpha+\psi))}{1-2m\cos\alpha+m^2}i$$

Hieraus folgt also zunächst, wenn man das Reelle und Imaginäre scheidet,

$$m\cos\psi+m^2\cos(\psi+\alpha)\ldots.+m^r\cos(\psi+(r-1)\alpha)$$

$$=\frac{(1-m\cos\alpha)(m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi))-m\sin\alpha(m\sin\psi-m^{r+1}\sin(r\alpha+\psi))}{1-2m\cos\alpha+m^2}$$

$$=\frac{m\cos\psi-m^{r+1}\cos(r\alpha+\psi)-m^2\cos(\psi-\alpha)+m^{r+2}\cos((r-1)\alpha+\psi)}{1-2m\cos\alpha+m^2},$$

oder

8) $$\cos\psi+m\cos(\psi+\alpha)\ldots+m^{r-1}\cos(\psi+(r-1)\alpha)$$

$$=\frac{\cos\psi-m^r\cos(\psi+r\alpha)-m\cos(\psi-\alpha)+m^{r+1}\cos(\psi+(r-1)\alpha)}{1-2m\cos\alpha+m^2}$$

und ebenso

9) $$\sin\psi+m\sin(\psi+\alpha)\ldots..+m^{r-1}\sin(\psi+(r-1)\alpha)$$

$$=\frac{\sin\alpha(m\cos\psi-m^{r+1}\cos(\psi+r\alpha))+(1-m\cos\alpha)(\sin\psi-m^r\sin(\psi+r\alpha))}{1-2m\cos\alpha+m^2}$$

$$=\frac{\sin\psi-m^r\sin(\psi+r\alpha)-m\sin(\psi-\alpha)+m^{r+1}\sin(\psi+(r-1)\alpha)}{1-2m\cos\alpha+m^2}.$$

Lässt man hier wieder $r$ unbegrenzt wachsen und setzt $m<1$, so gehen die Reihen 6) und 7) in zwei unendliche convergirende Reihen über und man erhält

10) $$\cos\psi+m\cos(\psi+\alpha)+m^2\cos(\psi+2\alpha)+\ldots.=\frac{\cos\psi-m\cos(\psi-\alpha)}{1-2m\cos\alpha+m^2}$$

11) $\sin\psi + m\sin(\psi+\alpha) + m^2\sin(\psi+2\alpha) + .... = \frac{\sin\psi - m\sin(\psi-\alpha)}{1-2m\cos\alpha+m^2}$

Setzt man in den Reihen 10) und 11) $\psi = \pm\alpha$ und bedenkt dass $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ so findet man

$$\cos\psi + m\cos 2\psi + \ldots = \frac{\cos\psi - m}{1-2m\cos\psi+m^2}$$

$$\sin\psi + m\sin 2\psi + \ldots = \frac{\sin\psi}{1-2m\cos\psi+m^2}$$

übereinstimmend mit den oben gefundenen Reihen 5) und 6).

## 117.

Ist $m = 1$ so erhält man aus 8) und 9)

12) $\cos\psi + \cos(\psi+\alpha) + \ldots + \cos(\psi+(r-1)\alpha)$

$$= \frac{\cos\psi - \cos(\psi+r\alpha) - \cos(\psi-\alpha) + \cos(\psi+(r-1)\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}$$

13) $\sin\psi + \sin(\psi+\alpha) + \ldots + \sin(\psi+(r-1)\alpha)$

$$= \frac{\sin\psi - \sin(\psi+r\alpha) - \sin(\psi-\alpha) + \sin(\psi+(r-1)\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}$$

welche Ausdrücke sich noch weiter vereinfachen lassen.

Berücksichtigt man nemlich die in §. 100 gefundene Gleichung

$$(\sin x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

so folgt daraus

$$1 - \cos\alpha = 2\left(\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^2$$

Da ferner (§. 95 Form. 11 und 13)

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

so erhält man, wenn man die vorletzte Gleichung von der letzten abzieht,

14) $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y$

Setzt man hier $x = (r-\frac{1}{2})\alpha + \psi$; $y = \frac{1}{2}\alpha$ so ist

$$x - y = (r-1)\alpha + \psi;\ x + y = r\alpha + \psi$$

und daher

15) $\cos((r-1)\alpha+\psi) - \cos(r\alpha+\psi) = 2\sin((r-\frac{1}{2})\alpha+\psi)\sin\frac{1}{2}\alpha$

Setzt man dagegen $x = \psi - \frac{1}{2}\alpha;\ y = \frac{1}{2}\alpha$ so ist

$$x - y = \psi - \alpha;\ x + y = \psi$$

und mithin

16) $$\cos(\psi - \alpha) - \cos\psi = 2\sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

Berücksichtigt man diese Werthe, so geht die Formel 12) in folgende über

17) $$\cos\psi + \cos(\psi + \alpha) \ldots + \cos(\psi + (r-1)\alpha)$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\,[\sin((r - \frac{1}{2})\alpha + \psi) - \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha)]}{4(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}$$
$$= \frac{\sin((r - \frac{1}{2})\alpha + \psi) - \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Da ferner (§. 95 Form. 12 u. 14)

$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

so folgt

18) $$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x\sin y$$

Setzt man wieder

$$x = (r - \frac{1}{2})\alpha + \psi;\ y = \frac{1}{2}\alpha$$

so folgt

19) $$\sin(r\alpha + \psi) - \sin((r-1)\alpha + \psi) = 2\cos((r - \frac{1}{2})\alpha + \psi)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

und wenn man

$$x = \psi - \frac{1}{2}\alpha;\ y = \frac{1}{2}\alpha$$

setzt,

20) $$\sin\psi - \sin(\psi - \alpha) = 2\cos(\psi - \frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

Demnach geht die Formel 13) in folgende über

21) $\sin\psi + \sin(\psi + \alpha) \ldots + \sin(\psi + (r-1)\alpha$

$$= \frac{\cos(\psi - \frac{1}{2}\alpha) - \cos(\psi + (r - \frac{1}{2})\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Setzt man aber

$$\psi - \frac{1}{2}\alpha = x - y;\ \psi + (r - \frac{1}{2})\alpha = x + y$$

also $x = \psi + \frac{r-1}{2}\alpha$; $y = \frac{r}{2}\alpha$ so folgt aus 18)

$$\sin(\psi + (r - \frac{1}{2})\alpha) - \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha) = 2\cos(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha)\sin\frac{r}{2}\alpha$$

und aus 14)

$$\cos(\psi - \frac{1}{2}\alpha) - \cos(\psi + (r - \frac{1}{2})\alpha) = 2\sin(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha)\sin\frac{r}{2}\alpha$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 17) und 21) in

22) $\cos\psi + \cos(\psi + \alpha) \ldots + \cos(\psi + (r-1)\alpha)$

$$= \frac{\cos(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha)\sin\frac{r}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

23) $\sin\psi + \sin(\psi + \alpha) \ldots + \sin(\psi + (r-1)\alpha)$

$$= \frac{\sin(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha)\sin\frac{r}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Würde man hier $r$ unbegrenzt wachsen lassen, so hätten die Ausdrücke $\cos(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha)$, $\sin(\psi + \frac{r-1}{2})\alpha$, $\sin\frac{r}{2}\alpha$ und mithin auch die Reihen 22) und 23) keinen bestimmten Werth mehr.

Die **endlichen** Reihen 22) und 23) müssen dagegen immer einen bestimmten Werth haben, dieser ist aber unter gewissen Verhältnissen nicht unmittelbar aus den so eben entwickelten Ausdrücken zu finden. Ist nemlich $\alpha = \pm 2l\pi$, wo $l$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha = 0$ und

$\sin \frac{r}{2} \alpha = 0$ (§. 99 Form. 27) und es gehen daher die gefundenen Werthe $\dfrac{\cos(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha) \sin \frac{r}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ und $\dfrac{\sin(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha) \sin \frac{r}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über.

Dies führt uns auf die Frage wie man in einem solchen Falle den Werth von $\dfrac{\sin \frac{r}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ bestimmen kann. Diese Frage werden wir beantworten können, wenn wir im Stande sind, folgende an und für sich wichtige Aufgabe zu lösen, nemlich wie man aus den bekannten Werthen von $\cos a$ und $\sin a$ den Werth von $\cos na$ und $\sin na$ finden kann, wenn $n$ irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Dies geschieht leicht mit Hülfe der Formel 16) des §. 95.

## 118.

Ist nemlich $n$ eine ganze positive Zahl, so können wir (§. 92) den Ausdruck

$$\left(1 + \frac{\sin a}{\cos a} i\right)^n$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und erhalten

$$\left(1 + \frac{\sin a}{\cos a} i\right)^n = 1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} \frac{\sin a}{\cos a} i + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 i^2 \ldots + {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^n i^n$$

mithin

$$(\cos na + \sin na \,.\, i) = (\cos a + \sin a \,.\, i)^n = (\cos a)^n \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a} i\right)^n =$$

$$(\cos a)^n + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-1} \sin a \,.\, i + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-2} (\sin a)^2 i^2 \ldots$$

$$+ {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} (\sin a)^n i^n$$

Trennt man hier das Reelle und Imaginäre, so werden

zwei Fälle zu unterscheiden seyn, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle erhält man

$$24)\quad \cos na = (\cos a)^n - {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-2}(\sin a)^2 \ldots \pm {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}}(\sin a)^n$$

$$25)\quad \sin na = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1}\sin a - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^3 \ldots \mp {}^n\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\cos a\,(\sin a)^{n-1}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k$ oder $4k+2$ enthalten ist.

Im zweiten Falle hat man

$$26)\quad \cos na = (\cos a)_n - {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-2}(\sin a)^2 \ldots \pm {}^n\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\cos a\,(\sin a)^{n-1}$$

$$27)\quad \sin na = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1}\sin a - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^3 \ldots \pm {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}}(\sin a)^n$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k+1$ oder $4k+3$ enthalten ist.

Man hat demnach, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist,

$$28)\quad \frac{\sin na}{\sin a} = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1} - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^2 \ldots \mp {}^n\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\cos a\,(\sin a)^{n-2}$$

oder

$$29)\quad \frac{\sin na}{\sin a} = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1} - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^2 \ldots \pm {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}}(\sin a)^{n-1}$$

Ist also $a = \pm l\pi$, wo $l$ jede ganze positive Zahl oder Null bedeutet, und mithin $\cos a = \pm 1$, $\sin a = 0$ so ist jedenfalls

$$\frac{\sin na}{\sin a} = \pm {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} = \pm n$$

wo, wenn $n$ gerade ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $l = 2k$ oder $l = 2k+1$ ist, dagegen, wenn $n$ ungerade, immer das obere.

Ist demnach $\sin \frac{1}{2} a = 0$ also $\frac{1}{2} a = \pm l\pi$, so ist

$$\frac{\sin\frac{r}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \pm r$$

und in diesem Falle (Form. 22 und 23)

$$\cos\psi + \cos(\psi+\alpha) \ldots + \cos(\psi+(r-1)\alpha)$$
$$= \pm r\cos(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha) = \pm r\cos\psi$$
$$\sin\psi + \sin(\psi+\alpha) \ldots + \sin(\psi+(r-1)\alpha)$$
$$= \pm r\sin(\psi + \frac{r-1}{2}\alpha) = \pm r\sin\psi$$

wie aus §. 99 Form. 28) folgt.

## 119.

An das Vorhergehende schliesst sich noch folgender Satz an. Die unendlichen Reihen

30) $a_0\sin\psi + a_1\sin(\psi+\alpha)\ldots + a_{r-1}\sin(\psi+(r-1)\alpha) + \ldots$

31) $a_0\cos\psi + a_1\cos(\psi+\alpha)\ldots + a_{r-1}\cos(\psi+(r-1)\alpha) + \ldots$

in welchen die Coefficienten $a_0$, $a_1$ .... positive Zahlen sind, welche immer kleiner werden und unbegrenzt abnehmen, so dass $\lim a_r = 0$, sind convergent, wenn nicht $\alpha = \pm 2l\pi$.

Man betrachte nemlich die Summe der $k$ ersten Glieder der Reihe 31), sie heisse $W_k$ so dass

$$W_k = a_0\cos\psi + a_1\cos(\psi+\alpha)\ldots + a_{k-1}\cos(\psi+(k-1)\alpha)$$

und multiplicire mit $2\sin\frac{1}{2}\alpha$ so ist

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha.\ W_k = 2[a_0\cos\psi\sin\frac{1}{2}\alpha + a_1\cos(\psi+\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha + \ldots$$
$$+ a_{k-1}\cos(\psi+(k-1)\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha]$$

Setzt man in 20) statt $\psi$ allmälich $\psi+\frac{1}{2}\alpha$, $\psi+\frac{3}{2}\alpha$, ... $\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha$ so folgt

$$2\cos\psi\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha) - \sin(\psi-\frac{1}{2}\alpha)$$
$$2\cos(\psi+\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi+\frac{3}{2}\alpha) - \sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha)$$

. . . . . .

$$2\cos(\psi+(k-1)\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha) - \sin(\psi+(k-\frac{3}{2})\alpha)$$

also

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha.\ W_k = -a_0\sin(\psi-\frac{1}{2}\alpha)+(a_0-a_1)\sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha)$$
$$+(a_1-a_2)\sin(\psi+\frac{3}{2}\alpha)+\ldots+(a_{k-2}-a_{k-1})\sin(\psi+(k-\frac{3}{2})\alpha)$$
$$+a_{k-1}\sin(\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha)$$

Lässt man nun $k$ unbegrenzt wachsen, so ist nach der Voraussetzung $\lim a_{k-1}=0$ also auch $\lim a_{k-1}\cos(\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha)$, da der Cosinus jedenfalls einen endlichen Werth hat, mithin ist

$$\lim W_k = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\lim[-a_0\sin(\psi-\frac{1}{2}\alpha)+(a_0-a_1)\sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha)$$
$$+(a_1-a_2)\sin(\psi+\frac{3}{2}\alpha)\ldots\ldots+(a_{k-2}-a_{k-1})\sin(\psi+(k-\frac{3}{2})\alpha)$$
$$+a_{k-1}\sin(\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha)]$$

aber $\lim a_{k-1}\sin(\psi+(k-\frac{1}{2})\alpha)=0$ also

$$\lim W_k = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\lim[-a_0\sin(\psi-\frac{1}{2}\alpha)+(a_0-a_1)\sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha)\ldots$$
$$+(a_{k-2}-a_{k-1})\sin(\psi+(k-\frac{3}{2}\alpha))]$$

Nun ist

$$\lim[(a_0-a_1)+(a_1-a_2)\ldots.+(a_{k-2}-a_{k-1})]=\lim(a_0-a_{k-1})=a_0$$

also ein endlicher Werth, folglich muss auch

$$\lim[-a_0\sin(\psi-\frac{1}{2}\alpha)+(a_0-a_1)\sin(\psi+\frac{1}{2}\alpha)\ldots$$
$$+(a_{k-2}-a_{k-1})\sin(\psi+(k\ \ \frac{3}{2}\alpha))]$$

einen endlichen Werth haben, da die einzelnen positiven Glieder der Reihe

$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_{k-2} - a_{k-1})$

hier mit Ausdrücken multiplicirt sind, welche höchstens der positiven Einheit gleich sind, und mithin hat auch $\lim W_k$ einen endlichen Werth, sobald nicht $2 \sin \frac{1}{2} \alpha = 0$, d. h. sobald nicht $\alpha = \pm 2l\pi$ ist.

Betrachtet man dagegen die $k$ ersten Glieder der Reihe 30) und setzt deren Summe $W_k$ so dass

$$W_k = a_0 \sin \psi + a_1 \sin (\psi + \alpha) \dots + a_{k-1} \sin (\psi + (k-1)\alpha)$$

so ist

$$2 \sin \frac{1}{2} \alpha . \; W_k = 2 [a_0 \sin \psi \sin \frac{1}{2} \alpha + a_1 \sin (\psi + \alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha \dots$$
$$+ a_{k-1} \sin (\psi + (k-1)\alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha]$$

Aus Formel 16) erhält man aber, wenn man in derselben statt $\psi$ allmälich $\psi + \frac{1}{2}\alpha$, $\psi + \frac{3}{2}\alpha \dots \psi + (k - \frac{1}{2}\alpha)$ setzt,

$$2 \sin \psi \sin \frac{1}{2} \alpha = \cos (\psi - \frac{1}{2} \alpha) - \cos (\psi + \frac{1}{2} \alpha)$$

$$2 \sin (\psi + \alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha = \cos (\psi + \frac{1}{2} \alpha) - \cos (\psi + \frac{3}{2} \alpha)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2 \sin (\psi + (k-1)\alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha = \cos (\psi + (k - \frac{3}{2})\alpha) - \cos (\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha)$$

also $2 \sin \frac{1}{2} \alpha . \; W_k = a_0 \cos (\psi - \frac{1}{2} \alpha) - (a_0 - a_1) \cos (\psi + \frac{1}{2} \alpha)$

$$- (a_1 - a_2) \cos (\psi + \frac{3}{2} \alpha) \dots - (a_{k-2} - a_{k-1}) \cos (\psi + (k - \frac{3}{2}) \alpha)$$
$$- a_{k-1} \cos \psi + (k - \frac{1}{2}) \alpha)$$

und

$$\lim W_k = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha} \lim [a_0 \cos (\psi - \frac{1}{2} \alpha) - (a_0 - a_1) \cos (\psi + \frac{1}{2} \alpha) \dots$$
$$- (a_{k-2} - a_{k-1}) \cos (\psi + (k - \frac{3}{2}) \alpha)]$$

Nun ist
$\lim\, [(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) \ldots + (a_{k-2} - a_{k-1})] = a_0$
umsomehr hat

$\lim [(a_0 - a_1) \cos(\psi + \frac{1}{2}\alpha) + \ldots + (a_{k-2} - a_{k-1}) \cos(\psi + (k - \frac{3}{2}\alpha)]$

und mithin auch $\lim W_k$ einen bestimmten Werth, sobald nicht $\alpha = \pm 2l\pi$.

120.

In ähnlicher Weise kann man auch zeigen dass die unendlichen Reihen
32) $a_0 \sin\psi - a_1 \sin(\psi + \alpha) + a_2 \sin(\psi + 2\alpha) - \ldots$
33) $a_0 \cos\psi - a_1 \cos(\psi + \alpha) + a_2 \cos(\psi + 2\alpha) - \ldots$
convergiren, wenn die Coefficienten $a_0, a_1 \ldots$ ihre frühere Bedeutung behalten, sobald nicht $\alpha = \pm (2l + 1)\pi$ ist.

Setzt man $W_k = a_0 \sin\psi - a_1 \sin(\psi + \alpha) \ldots + a_{k-1} \sin(\psi + (k-1) - a_k \sin(\psi + k\alpha)$
und multiplicirt mit $2 \cos \frac{1}{2}\alpha$ so erhält man

$2 \cos \frac{1}{2}\alpha.\ W_k = 2 [a_0 \sin\psi \cos\frac{1}{2}\alpha - a_1 \sin(\psi + \alpha) \cos\frac{1}{2}\alpha \ldots$

$- a_k \sin(\psi + k\alpha) \cos\frac{1}{2}\alpha]$

Setzt man nun in 18) statt $y$ allmälich die Werthe $\psi$, $\psi + \alpha, \ldots \psi + k\alpha$ und statt $x$ den Werth $\frac{1}{2}\alpha$, so erhält man, wenn man die Formel $\sin(-x) = -\sin x$ berücksichtigt, (§. 96 Form. 18)

$$2 \sin\psi \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi + \frac{1}{2}\alpha) + \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha)$$

$$2 \sin(\psi + \alpha) \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi + \frac{3}{2}\alpha) + \sin(\psi + \frac{1}{2}\alpha)$$

$$\ldots\ldots$$

$$2 \sin(\psi + k\alpha) \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin(\psi + (k + \frac{1}{2})\alpha) + \sin(\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha)$$

und demnach

$$2\cos\frac{1}{2}\alpha . W_k = a_0 \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha) + (a_0 - a_1)\sin(\psi + \frac{1}{2}\alpha)$$

$$- (a_1 - a_2)\sin(\psi + \frac{3}{2}\alpha) \ldots + (a_{k-1} - a_k)\sin(\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha)$$

$$- a_k \sin(\psi + (k + \frac{1}{2})\alpha)$$

also

$$\lim W_k = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} \lim [a_0 \sin(\psi - \frac{1}{2}\alpha) + (a_0 - a_1)\sin(\psi + \frac{1}{2}\alpha)$$

$$- (a_1 - a_2)\sin(\psi + \frac{3}{2}\alpha) \ldots + (a_{k-1} - a_k)\sin(\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha)]$$

Den grössten Werth, welchen die Grenze der Reihe

$$34) \quad (a_0 - a_1)\sin(\psi + \frac{1}{2}\alpha) - (a_1 - a_2)\sin(\psi + \frac{3}{2})\alpha + (a_2 - a_3)\sin(\psi + \frac{5}{2}\alpha) \ldots$$

$$+ (a_{k-1} - a_k)\sin(\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha)$$

überhaupt annehmen kann, erhält sie offenbar dann, wenn die einzelnen Glieder sämmtlich positiv sind und jedes Glied seinen grössten möglichen Zahlenwerth annimmt. Damit sie diesen Werth erhielte, müsste allgemein $\sin(\psi + \frac{n}{2})\alpha = \pm 1$ seyn, und zwar müsste das obere oder untere Zeichen gelten, je nachdem $n$ in der Form $4n + 1$ oder $4n + 3$ enthalten ist. Denn unter dieser Voraussetzung gienge die Reihe 34) in

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) \ldots + (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_k$$

über, deren Grenze den endlichen Werth $a_0$ hat, folglich muss auch die Grenze der Reihe 34) immer einen endlichen Werth haben und demnach ist auch $\lim W_k$ ein bestimmter Werth, ausgenommen wenn $\alpha = \pm (2l + 1)\pi$ weil dann $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos(l + \frac{1}{2})\pi = 0$ (§. 99 Form. 27).

Setzt man $W_k = a_0 \cos\psi - a_1 \cos(\psi + \alpha) \ldots - a_k \cos(\psi + k\alpha)$ so ist

$2 \cos \frac{1}{2}\alpha . \; W_k = 2 [a_0 \cos \psi \cos \frac{1}{2}\alpha - a_1 \cos(\psi + \alpha) \cos \frac{1}{2}\alpha \ldots$

$- a_k \cos(\psi + k\alpha) \cos \frac{1}{2}\alpha]$

Nun folgt, wenn man die zwei Formeln

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

addirt,

$$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$$

und wenn man hier $x = \frac{1}{2}\alpha$ und $y$ allmälich $= \psi, \psi + \alpha, \ldots \psi + k\alpha$ setzt, und zugleich die Formel $\cos (-x) = \cos x$ berücksichtigt, so findet man

$$2 \cos \frac{1}{2}\alpha . \; W_k = a_0 \cos(\psi - \frac{1}{2}\alpha) + (a_0 - a_1) \cos (\psi + \frac{1}{2}\alpha) - \ldots$$

$$+ (a_{k-1} - a_k) \cos (\psi + (k - \frac{1}{2})\alpha) - a_k \cos(\psi + (k + \frac{1}{2})\alpha)$$

Man beweist wieder ebenso wie im vorhergehenden Falle, dass die Grenze dieses Ausdrucks immer einen bestimmten Werth hat, und dass daher auch $\lim W_k$ einen bestimmten Werth hat, sobald nicht $\cos \frac{1}{2}\alpha = 0$ ist.

## 121.

In dem besonderen Falle wenn $\psi = \alpha$ gehen die Reihen 30) und 31) in

$$a_0 \sin \alpha + a_1 \sin 2\alpha + a_2 \sin 3\alpha + \ldots$$
$$a_0 \cos \alpha + a_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos 3\alpha + \ldots$$

über, welche also beide convergiren sobald nicht $\alpha = \pm 2l\pi$, die erste convergirt aber auch noch wenn $\alpha = \pm 2l\pi$, da $\sin (\pm 2l\pi) = 0$.

Ebenso gehen für $\psi = \alpha$ die Reihen 32) und 33) in

$$a_0 \sin \alpha - a_1 \sin 2\alpha + a_2 \sin 3\alpha - \ldots$$
$$a_0 \cos \alpha - a_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos 3\alpha - \ldots$$

über, welche beide convergiren, wenn nicht $\alpha = \pm (2l + 1)\pi$, während die erste Null wird, wenn $\alpha = \pm (2l+1)\pi$.

122.

Setzt man $\sin a = z$ und also $\cos a = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$, dann verwandelt sich die Formel 24) in

$$\cos na = (1-z^2)^{\frac{n}{2}} - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-2}{2}} z^2 + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-4}{2}} z^4 \ldots\ldots$$
$$\pm\; {}^{n}\overset{2k}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-2k}{2}} z^{2k} \mp \ldots\ldots$$

Da diese Formel für ein gerades $n$ gilt, so sind die Exponenten $\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}$ u. s. w. sämmtlich ganze Zahlen. Entwickelt man nun $(1-z^2)^{\frac{n}{2}}, (1-z^2)^{\frac{n-2}{2}}$ u. s. w. nach dem binomischen Lehrsatz, so sind die Reihen, welche man hierdurch erhält, endliche, und man findet

$$\cos na = 1 - {}^{\frac{n}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}} z^2 + {}^{\frac{n}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}} z^4 - {}^{\frac{n}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}} z^6 \ldots\ldots \pm {}^{\frac{n}{2}}\overset{k}{\mathfrak{B}} z^{2k} \ldots\ldots$$
$$- {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} z^2 + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}} z^4 - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}} z^6 \ldots \pm {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2}{2}}\overset{k-1}{\mathfrak{B}} z^{2k} \ldots\ldots$$
$$+ {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} z^4 - {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-4}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}} z^6 \ldots \pm {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-4}{2}}\overset{k-2}{\mathfrak{B}} z^{2k} \ldots\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist offenbar, da ${}^{n}\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1$ (§. 34),

$$\pm \left({}^{n}\overset{0}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n}{2}}\overset{k}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2}{2}}\overset{k-1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-4}{2}}\overset{k-2}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{n}\overset{2k}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2k}{2}}\overset{0}{\mathfrak{B}}\right) z^{2k}$$
$$= \pm \sum_{0,k}^{r} {}^{n}\overset{2r}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2r}{2}}\overset{k-r}{\mathfrak{B}} z^{2k}.$$

Man kann demnach $\cos na$ in eine endliche Reihe von der Form

$$\cos na = 1 - A_1 (\sin a)^2 + A_2 (\sin a)^4 \ldots \pm A_k (\sin a)^{2k} \mp \ldots$$
$$= 1 + \sum_{1,\frac{n}{2}}^{k} (-1)^k A_k (\sin a)^{2k}$$

entwickeln, wo $A_k = \sum_{0,k}^{r} {}^{n}\overset{2r}{\mathfrak{B}}\, {}^{\frac{n-2r}{2}}\overset{k-r}{\mathfrak{B}}$ ist. Dieser Ausdruck lässt sich aber weiter umformen. Man hat nemlich

$$ {}^{n}\mathfrak{B}^{2r}\;{}^{\frac{n-2r}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2r+1)}{1.2.3\dots.2r}\cdot\frac{\frac{n-2r}{2}(\frac{n-2r}{2}-1)\dots(\frac{n-2r}{2}-(k-r-1))}{1\,.\,2\,\dots\,(k-r)} $$

$$ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,2r}\cdot\frac{(n-2r)(n-2r-2)\dots(n-2k+2)}{2\,.\,4\,.\,(2k-2r)} $$

$$ = \frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2k+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2r-1)}\cdot\frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2r+1)}{2\,.\,4\,\dots\,2r}\cdot\frac{1}{2.4\dots(2k-2r)} $$

Man multiplicire und dividire noch mit $(2r+1)\dots(2k-1)$ so hat man:

$$ {}^{n}\mathfrak{B}^{2r}\;{}^{\frac{n-2r}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} = \frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2k+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2k-1)}\cdot\frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2r+1)}{2\,.\,4\,\dots\,2r} $$

$$ \cdot\frac{(2k-1)(2k-3)\dots(2r+1)}{2\,.\,4\,.\,.\,(2k-2r)} = \frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2k+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2k-1)} $$

$$ \cdot\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)\dots(\frac{n-1}{2}-(r-1))}{1\,.\,2\,\dots\,r}\cdot\frac{\frac{2k-1}{2}(\frac{2k-1}{2}-1)\dots(\frac{2k-1}{2}-(k-r-1))}{1\,.\,2\,\dots\,(k-r)} $$

$$ = \frac{n.(n-2)(n-4)\dots(n-2k+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2k-1)}\;{}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{r}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} $$

Da nun in diesem letzten Ausdrucke der Faktor $\frac{n.(n-2)\dots(n-2k+2)}{1.3\dots(2k-1)}$ von $r$ gänzlich unabhängig ist, und daher für jedes $r$ derselbe bleibt, so hat man

$$ A_k = \frac{n(n-2)\dots(n-2k+2)}{1\,.\,3\,\dots\,(2k-1)}\sum_{0,k}^{r}{}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{r}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} $$

Setzt man aber in §. 38 Form. 27)

$$ a = \frac{2k-1}{2},\ b = \frac{n-1}{2},\ r = k $$

so findet man

$$ {}^{\frac{2k+n-2}{2}}\mathfrak{B}^{k} = {}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{0}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k} + {}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{1}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-1}\dots $$

$$ + {}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{k}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{0} = \sum_{0,k}^{r}{}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{r}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} $$

also

$$A_k = \pm \frac{n\,(n-2)\ldots(n-2k+2)}{1\,.\,3\ldots(2k-1)}\;{}^{\frac{2k+n-2}{2}}\overset{k}{\mathfrak{B}}$$

$$= \frac{n(n-2)\ldots(n-2k+2)}{1\,.\,3\ldots(2k-1)}\cdot\frac{\frac{2k+n-2}{2}\left(\frac{2k+n-2}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{2k+n-2}{2}-(k-1)\right)}{1\,.\,2\ldots k}$$

$$= \frac{n\,(n-2)\ldots(n-2k+2)}{1\,.\,3\ldots(2k-1)}\cdot\frac{n\,(n+2)\ldots(n+2k-2)}{2\,.\,4\ldots 2k}$$

$$= \frac{n^2\,(n^2-2^2)\,(n^2-4^2)\ldots(n^2-(2k-2)^2)}{1\,.\,2\ldots 2k}$$

und

$$35)\quad \cos na = 1 + \sum_{1,\frac{n}{2}}^{k}(-1)^k\,\frac{n^2\,(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k-2)^2)}{1\,.\,2\ldots 2k}\,(\sin a)^{2k}$$

also, wenn man die ersten Glieder entwickelt,

$$\cos na = 1 - \frac{n^2}{1\,.\,2}(\sin a)^2 + \frac{n^2\,(n^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\sin a)^4 - \frac{n^2\,(n^2-2^2)\,(n^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}(\sin a)^6 + \ldots$$

## 123.

Es folgt ferner aus Formel 25) für jedes gerade $n$

$$\frac{\sin na}{\cos a} = {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-2}{2}}\,.\,z - {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-4}{2}}\,.\,z^3\ldots \mp {}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,z^{n-1}$$

Entwickelt man hier wieder $(1-z^2)^{\frac{n-2}{2}}$, $(1-z^2)^{\frac{n-4}{2}}$ u.s.w. nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man

$$\frac{\sin na}{\cos a} = {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}z - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-2}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}}z^3 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-2}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}}z^5\ldots \pm {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-2}{2}}\overset{k}{\mathfrak{B}}z^{2k+1} \mp \ldots$$

$$- {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}z^3 + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-4}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}}z^5\ldots \pm {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-4}{2}}\overset{k-1}{\mathfrak{B}}z^{2k+1} \mp \ldots$$

$$+ {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}z^5\ldots \pm {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{n-6}{2}}\overset{k-2}{\mathfrak{B}}z^{2k+1} \mp \ldots$$

. . . . . . . . . . . .

Man kann also

$$\frac{\sin na}{\cos a} = A_1 \sin a - A_3 (\sin a)^3 \ldots \pm A_{2k+1} (\sin a)^{2k+1} \mp \ldots$$

$$= \sum_{0,\frac{k-2}{2}}^{k} (-1)^k A_{2k+1} (\sin a)^{2k+1}$$

setzen, wo

$$A_{2k+1} = {}^n\mathfrak{B}^1 \; {}^{\frac{n-2}{2}}\mathfrak{B}^k + {}^n\mathfrak{B}^3 \; {}^{\frac{n-4}{2}}\mathfrak{B}^{k-1} \ldots + {}^n\mathfrak{B}^{2k+1} \; {}^{\frac{n-(2k+2)}{2}}\mathfrak{B}^0$$

$$= \sum_{0,k}^{r} {}^n\mathfrak{B}^{2r+1} \; {}^{\frac{n-(2r+2)}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

Nun ist $${}^n\mathfrak{B}^{2r+1} \; {}^{\frac{n-(2r+2)}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(n-2r)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(2r+1)}$$

$$\cdot \frac{\frac{n-(2r+2)}{2}\left(\frac{n-(2r+2)}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-(2r+2)}{2}-(k-r-1)\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-r)}$$

$$= \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2k)}{1.3.5\ldots(2r+1)} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,2r} \cdot \frac{1}{2.4\ldots(2k-2r)}$$

$$= \frac{n(n-2)\,(n-4)\ldots(n-2k)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2k+1)} \cdot \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-1}{2}-(r-1)\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}$$

$$\cdot \frac{\frac{2k+1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{2k+1}{2}-(k-r-1)\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-r)}$$

$$= \frac{n\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-2k)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,2k+1} \; {}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^r \; {}^{\frac{2k+1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

Da hier wieder der erste Faktor unabhängig von $r$ ist, so hat man

$$A_{2k+1} = \frac{n(n-2)\ldots(n-2k)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2k+1)} \sum_{0,k}^{r} {}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^r \; {}^{\frac{2k+1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

Setzt man aber in §. 38 Form 27)

$$a = \frac{2k+1}{2},\; b = \frac{n-1}{2},\; r = k$$

so folgt

$$A_{2k+1} = \frac{n(n-2)\ldots(n-2k)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)} \; {}^{\frac{n}{2}+k}\mathfrak{B}^{k}$$

$$= \frac{n(n-2)\ldots(n-2k)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{(n+2)\ldots(n+2k)}{2\ldots 2k} = \frac{n(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k)^2)}{1\,.\,2\ldots(2k+1)}$$

und

$$36)\quad \frac{\sin na}{\cos a} = \sum_{0,\,\frac{n-2}{2}}^{k} (-1)^k \cdot \frac{n(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k)^2)}{1\,.\,2\ldots(2k+1)} (\sin a)^{2k+1}$$

also

$$\sin na = \cos a \left[ n \sin a - \frac{n(n^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3} (\sin a)^3 \right.$$

$$\left. + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} (\sin a)^5 - \ldots \right]$$

## 124.

Für ein ungerades $n$ hat man nach Formel 26)

$$\frac{\cos na}{\cos a} = (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} - {}^{n}\mathfrak{B}^{2}(1-z^2)^{\frac{n-3}{2}} z^2 \ldots + {}^{n}\mathfrak{B}^{n-1} z^{n-1}$$

Verfährt man wieder, wie in den vorhergehenden Fällen, so findet man

$$\frac{\cos na}{\cos a} = 1 - A_1 z^2 + A_2 z^4 \ldots \pm A_k z^{2k} \ldots \pm A_{n-1} z^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{1,\,\frac{n-1}{2}}^{k} (-1)^k A_k z^{2k}$$

wo $A_k = \sum_{0,k}^{r} {}^{n}\mathfrak{B}^{2r} \; {}^{\frac{n-(2r+1)}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$

Nun ist

$${}^{n}\mathfrak{B}^{2r} \; {}^{\frac{n-(2r+1)}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\ldots 2r}$$

$$\cdot \frac{\frac{n-(2r+1)}{2}\left(\frac{n-(2r+1)}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-(2r+1)}{2}-(k-r-1)\right)}{1\,.\,2\ldots(k-r)}$$

$$=\frac{(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2r-1)}\cdot\frac{n(n-2)\ldots(n-2r+2)}{2\,.\,4\,\ldots\,2r}\cdot\frac{1}{2\,.\,4\ldots(2k-2r)}$$

$$=\frac{(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2k-1)}\cdot\frac{\frac{n}{2}\,(\frac{n}{2}-1)\ldots(\frac{n}{2}-(r-1))}{1\,.\,2\,\ldots\,r}$$

$$\cdot\frac{(\frac{2k-1}{2})\,(\frac{2k-1}{2}-1)\ldots(\frac{2k-1}{2}-(k-r-1))}{1\,.\,2\,\ldots\,(k-r)}$$

$$=\frac{(n-1)\,(n-3)\,\ldots\,(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2k-1)}\;{}^{\frac{n}{2}}\overset{r}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\overset{k-r}{\mathfrak{B}}$$

also

$$A_k=\frac{(n-1)\,(n-3)\,\ldots\,(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2k-1)}\;\sum_{0,k}^{r}{}^{\frac{n}{2}}\overset{r}{\mathfrak{B}}\;{}^{\frac{2k-1}{2}}\overset{k-r}{\mathfrak{B}}\,.$$

Setzt man nun in § 38 Form. 27)

$$a=\frac{2k-1}{2},\;b=\frac{n}{2},\;r=k$$

so folgt

$$A_k=\frac{(n-1)\,(n-3)\,\ldots\,(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2k-1)}\;{}^{\frac{n+2k-1}{2}}\overset{k}{\mathfrak{B}}$$

$$=\frac{(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\,\ldots\,(2k-1)}\cdot\frac{(n+1)\,(n+3)\ldots(n+2k-1)}{2\,.\,4\,\ldots\,2k}$$

$$=\frac{(n^2-1)\,(n^2-3^2)\,\ldots\,(n^2-(2k-1)^2)}{1\,.\,2\,\ldots\,2k}$$

und

$$37)\quad\frac{\cos na}{\cos a}=1+\sum_{1,\frac{n-1}{2}}^{k}(-1)^k\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\,.\,2\,\ldots\,2k}(\sin a)^{2k}$$

also

$$\cos na=\cos a\,[1-\frac{n^2-1}{1\,.\,2}(\sin a)^2+\frac{(n^2-1)\,(n^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\sin a)^4-\ldots]$$

Die Formel 27) kann man auch in folgender Gestalt schreiben

$$\frac{\sin na}{\sin a}={}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1}-{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^2\ldots\pm{}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}(\sin a)^{n-1}$$

$$={}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}-{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}(1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}z^2\ldots\pm{}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}z^{n-1}$$

Hieraus folgt wieder

$$\frac{\sin na}{\sin a} = A_0 - A_1 z^2 + A_2 z^4 \ldots \pm A_k z^{2k} \mp \ldots = \sum_{0,\frac{n-1}{2}}^{k} (-1)^k A_k z^{2k}$$

und

$$A_k = {}^{n}\mathfrak{B}^{1}\;{}^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{B}^{k} + {}^{n}\mathfrak{B}^{3}\;{}^{\frac{n-3}{2}}\mathfrak{B}^{k-1} \ldots + {}^{n}\mathfrak{B}^{2k+1}\;{}^{\frac{n-2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{0} = \sum_{0|k}^{r} {}^{n}\mathfrak{B}^{2r+1}\;{}^{\frac{n-2r-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

Nun ist

$${}^{n}\mathfrak{B}^{2r+1}\;{}^{\frac{n-2r-1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-2r)}{1\,.\,2\ldots(2r+1)} \cdot \frac{\frac{n-2r-1}{2}\ldots\left(\frac{n-2r-1}{2}-(k-r-1)\right)}{1\,.\,2\ldots(k-r)}$$

$$= \frac{n.(n-1)(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{\frac{n-2}{2}\,.\left(\frac{n-2}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-2}{2}-(r-1)\right)}{1\,.\,2\ldots r}$$

$$\cdot \frac{\frac{2k+1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{2k+1}{2}-(k-r-1)\right)}{1\,.\,2\ldots(k-r)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)}\;{}^{\frac{n-2}{2}}\mathfrak{B}^{r}\;{}^{\frac{2k+1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

also

$$A_k = \frac{n(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)}\;\sum_{0,k}^{r}\;{}^{\frac{n-2}{2}}\mathfrak{B}^{r}\;{}^{\frac{2k+1}{2}}\mathfrak{B}^{k-r}$$

Setzt man aber in §. 38 Form. 27)

$$\frac{2k+1}{2} = a,\; \frac{n-2}{2} = b,\; r = k$$

so folgt

$$A_k = \frac{n\,(n-1)\,(n-3)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)}\,.\;{}^{\frac{n+2k-1}{2}}\mathfrak{B}^{k}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1\,.\,3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{(n+1)\,(n+3)\ldots(n+2k-1)}{2\,.\,4\ldots 2k}$$

$$= \frac{n\,(n^2-1)\,(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k+1)}$$

und

38) $$\frac{\sin na}{\sin a} = \sum_{0,\,\frac{n-1}{2}}^{k}(-1)^k \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\;.\;2\;\ldots\;(2k+1)}(\sin a)^{2k}$$

also

$$\sin na = n \sin a - \frac{n(n^2-1)}{1\,.\,2\,.\,3}(\sin a)^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\sin a)^5 - \ldots$$

## 125.

In den Formeln 35), 36), 37), 38) geht die Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\sin a$ fort. Hätte man aber $\cos a = z$ und also $\sin a = \sqrt{1-z^2}$ gesetzt, so hätte man ebensowohl aus den Formeln 24) bis 27) andere ableiten können, in welchen eine Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\cos a$ statt findet. Die Formeln 35) bis 38) führen aber zu demselben Resultate. Setzt man nemlich in diesen Formeln überall $\frac{\pi}{2} - a$ statt $a$, so ist $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$. Ferner ist nach §. 99 Form. 28), wenn $n$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \pm \cos na,\quad \sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \mp \sin na$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k$ oder $4k+2$ enthalten ist. Ist dagegen $n$ eine ungerade Zahl, so ist

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \pm \sin na,\quad \sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \pm \cos na$$

je nachdem $n$ in der Form $4k+1$ oder in der Form $4k+3$ enthalten ist. Demnach geben die Formeln 35) und 36)

39) $$\pm \cos na = \pm 1 + \sum_{1,\,\frac{n}{2}}^{k}(-1)^k \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k-2)^2)}{1\;.\;2\;\ldots\;2k}(\cos a)^{2k}$$

40) $$\mp \frac{\sin na}{\sin a} = \sum_{0,\,\frac{n-2}{2}}^{k}(-1)^k \frac{n(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k)^2)}{1\;.\;2\;\ldots\;(2k+1)}(\cos a)^{2k+1}$$

und aus den Formeln 37) und 38) folgt

41) $$\pm \frac{\sin na}{\sin a} = 1 + \sum_{1,\ \frac{n-1}{2}}^{k} (-1)^k \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\ .\ 2\ \ldots\ 2k} (\cos a)^{2k}$$

42) $$\pm \frac{\cos na}{\cos a} = \sum_{0,\ \frac{n-1}{2}}^{k} (-1)^k \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (2k+1)} (\cos a)^{2k}$$

### 126.

So wie im Vorhergehenden die Aufgabe gelöst worden ist, vermittelst der bekannten Potenzen von $\sin a$ und $\cos a$ den Werth von $\sin na$ und $\cos na$ zu finden, so kann man auch die umgekehrte Aufgabe lösen, nemlich irgend eine ganze positive Potenz $n$ von $\sin a$ und $\cos a$ vermittelst der bekannten Werthe von $\sin a$, $\sin 2a \ldots \sin na$ und $\cos a$, $\cos 2a \ldots \cos na$ zu finden. Am Einfachsten geschieht dies, wenn man die Formeln 9) und 10) des §. 95 zu Hülfe nimmt.

Aus der ersten dieser Formeln ergiebt sich nemlich

$$2 \cos a = e^{ai} + e^{-ai}$$

Erhebt man auf beiden Seiten auf die $n$te Potenz, wo $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist

$$2^n (\cos a)^n = (e^{ai} + e^{-ai})^n = e^{nai} + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} e^{(n-1)ai}\ .\ e^{-ai} + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}} e^{(n-2)ai} e^{-2ai} \ldots + {}^n\overset{n-1}{\mathfrak{B}} e^{ai}\ .\ e^{-(n-1)ai} + {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}} e^{-nai}$$

Da ${}^n\overset{n}{\mathfrak{B}} = 1$, ${}^n\overset{n-1}{\mathfrak{B}} = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}$ u. s. w. (§. 35 Form. 13) so ist

43) $$2^n (\cos a)^n = (e^{nai} + e^{-nai}) + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} (e^{(n-2)ai} + e^{-(n-2)ai}) + \ldots\ldots$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle ist die Anzahl $n+1$ der Glieder in der Entwickelung von $(e^{ai} + e^{-ai})^n$ eine gerade und die Glieder entsprechen sich paarweise, so dass die gleichweit von Anfang und Ende der Entwickelung abstehenden denselben Coefficienten haben (§. 35). Die Formel 43) verwandelt sich daher in

$$2 (\cos a)^n = (e^{nai} + e^{-nai}) + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} (e^{(n-2)ai} + e^{-(n-2)ai}) + \ldots + {}^n\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}} (e^{ai} + e^{-ai})$$

Bedenkt man nun, dass $e^{nai} + e^{-nai} = 2 \cos na$, $e^{(n-2)ai} + e^{-(n-2)ai} = 2 \cos (n-2)a$ u.s.w. ist, so folgt hieraus für ein ungerades $n$

$$44)\quad 2^{n-1}(\cos a)^n = \cos na + {}^n\mathfrak{B}^1 \cos (n-2)\,a \ldots + {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n-1}{2}} \cos a$$

Ist dagegen $n$ gerade, so hat die Entwickelung von $(e^{ai} + e^{-ai})^n$ das Mittelglied ${}^n\mathfrak{B}^{\frac{n}{2}} e^{(n-2 \cdot \frac{n}{2})ai} = {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n}{2}}$ und man hat daher

$$45)\quad 2^{n-1}(\cos a)^n = \cos na + {}^n\mathfrak{B}^1 \cos (n-2)a \ldots + {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n-2}{2}} \cos 2a + \frac{1}{2}\,{}^n\mathfrak{B}^{\frac{n}{2}}$$

Aus Formel 10) des §. 95 ergiebt sich

$$2i \sin a = e^{ai} - e^{-ai}$$

also

$$2^n i^n (\sin a)^n = (e^{ai} - e^{-ai})^n = e^{nai} - {}^n\mathfrak{B}^1 e^{(n-2)ai} + {}^n\mathfrak{B}^2 e^{(n-4)ai} \ldots \mp {}^n\mathfrak{B}^{n-1} e^{-(n-2)ai} \pm {}^n\mathfrak{B}^n e^{-nai}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Im ersten Falle hat die Entwickelung wieder ein Mittelglied, während die übrigen Glieder, die gleichweit von Anfang und Ende der Reihe abstehen, denselben Coefficienten haben. Man hat daher

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}(\sin a)^n = \cos na - {}^n\mathfrak{B}^1 \cos (n-2)a + {}^n\mathfrak{B}^2 \cos (n-4)a \ldots \mp {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n-2}{2}} \cos 2a \pm \frac{1}{2}\,{}^n\mathfrak{B}^{\frac{n}{2}}$$

Das obere oder untere Zeichen ist zu nehmen, je nachdem $n = 4k$ oder $n = 4k + 2$. Zugleich ist, je nachdem $n$ in der ersten oder der zweiten Form enthalten ist, $(-1)^{\frac{n}{2}} = 1$ oder $(-1)^{\frac{n}{2}} = -1$. Man hat mithin

wenn $n = 4k$

46) $2^{n-1}(\sin a)^n = \cos na - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(n-2)a + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(n-4)\,a \ldots$

$- {}^{n}\overset{\frac{n-2}{2}}{\mathfrak{B}}\cos 2a + \frac{1}{2}\,{}^{n}\overset{\frac{n}{2}}{\mathfrak{B}}$

und wenn $n = 4k + 2$

$-2^{n-1}(\sin a)^n = \cos na - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(n-2)a + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(n-4)\,a \ldots$

$+ {}^{n}\overset{\frac{n-2}{2}}{\mathfrak{B}}\cos 2a - \frac{1}{2}\,{}^{n}\overset{\frac{n}{2}}{\mathfrak{B}}$

oder

47) $2^{n-1}(\sin a)^n = -\cos na + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(n-2)a - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(n-4)a \ldots$

$- {}^{n}\overset{\frac{n-2}{2}}{\mathfrak{B}}\cos 2a + \frac{1}{2}\,{}^{n}\overset{\frac{n}{2}}{\mathfrak{B}}$

Ist dagegen $n$ ungerade, so hat die Entwickelung kein Mittelglied und die gleichweit von Anfang und Ende abstehenden Glieder haben dieselben Coefficienten, jedoch mit entgegengesetztem Zeichen. Es ist also

$2^n i^n (\sin a)^n = (e^{nai} - e^{-nai}) - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}(e^{(n-2)ai} - e^{-(n-2)ai}) + \ldots.$

Nun ist

$e^{nai} - e^{-nai} = 2i \sin na,\ e^{(n-2)ai} - e^{-(n-2)ai} = 2i \sin(n-2)a$ u.s.w.

also

$2^{n-1} i^{n-1} (\sin a)^n = \sin na - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin(n-2)a \ldots \pm {}^{n}\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}}\sin a$

Hier ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $n$ in der Form $4k + 1$ oder in der Form $4k + 3$ enthalten ist, zugleich ist im ersten Falle $i^{n-1} = 1$, im zweiten $i^{n-1} = -1$. Man hat demnach

wenn $n = 4k + 1$

48) $2^{n-1}(\sin a)^n = \sin na - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin(n-2)a \ldots - {}^{n}\overset{\frac{n-3}{2}}{\mathfrak{B}}\sin 3a + {}^{n}\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}}\sin a$

und wenn $n = 4k + 3$

$-2^{n-1}(\sin a)^n = \sin na - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin(n-2)a \ldots + {}^{n}\overset{\frac{n-3}{2}}{\mathfrak{B}}\sin 3a - {}^{n}\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}}\sin a$

oder

$$49)\quad 2^{n-1}(\sin a)^n = -\sin na + {}^n\mathfrak{B}^{1}\sin(n-2)a \ldots - {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n-3}{2}}\sin 3a + {}^n\mathfrak{B}^{\frac{n-1}{2}}\sin a$$

Man hat also z. B. je nachdem $n = 2, 3, 4, 5$

$$2\,(\sin a)^2 = -\cos 2a + 1$$
$$4\,(\sin a)^3 = -\sin 3a + 3\sin a$$
$$8\,(\sin a)^4 = \cos 4a - 4\cos 2a + 3$$
$$16\,(\sin a)^5 = \sin 5a - 5\sin 3a + 10\sin a$$

127.

Bisher wurden nur Sinus und Cosinus reeller Zahlen betrachtet. Indem wir aber in den Formeln 9) und 10) des §. 95 für $x$ eine complexe Zahl $u + vi$ setzen, erhalten wir hierdurch eine Werthbestimmung für $\sin(u+vi)$ und $\cos(u+vi)$. Es ist nemlich hiernach

$$50)\quad \cos(u + vi) = \frac{e^{(u+vi)i} + e^{-(u+vi)i}}{2}$$

$$51)\quad \sin(u + vi) = \frac{e^{(u+vi)i} - e^{-(u+vi)i}}{2i}$$

also, mit Rücksicht auf Formel 3) des §. 94,

$$\cos(u+vi) = \frac{e^{ui}.e^{-v} + e^{-ui}.e^{v}}{2} = \frac{(\cos u + \sin u.i)e^{-v} + (\cos u - \sin u.i)e^{v}}{2}$$

oder

$$52)\quad \cos(u + vi) = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\cos u - \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\sin u.i$$

und ebenso findet man

$$53)\quad \sin(u + vi) = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\sin u + \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\cos u.i$$

Ist $u = 0$ so folgt hieraus

$$54)\quad \cos(vi) = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}$$

$$55)\quad \sin(vi) = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}.i$$

Entwickelt man $e^v$ und $e^{-v}$ nach Formel 5) des §. 79 in Reihen, so findet man

$$56)\qquad \frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{v^2}{1\,.\,2} + \frac{v^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

$$57)\qquad \frac{e^v - e^{-v}}{2} = v + \frac{v^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{v^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots$$

und es ist demnach

$$58)\qquad \cos(vi) = 1 + \frac{v^2}{1\,.\,2} + \frac{v^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \ldots\ldots$$

$$59)\qquad \sin(vi) = i\left(v + \frac{v^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{v^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \ldots\ldots\right)$$

Dieselben Werthe würde man erhalten haben, wenn man in den Formeln 4) und 5) des §. 95 statt $x$ den Werth $vi$ gesetzt hätte.

So wie man die Cosinus und Sinus der reellen Zahlen die trigonometrischen (cyklischen) Cosinus und Sinus zu nennen pflegt, so hat man für die Cosinus und Sinus der rein imaginären Zahlen den Namen hyperbolische Cosinus und Sinus vorgeschlagen, weil sie in einer ähnlichen Beziehung zur Hyperbel stehen, wie jene zum Kreise*). Aus den oben gegebenen convergirenden Reihen für $\cos(vi)$ und $\sin(vi)$ kann man für jedes gegebene $v$ den Werth des entsprechenden hyperbolischen Cosinus und Sinus finden.

Setzt man, der Formel $tg\,\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$ analog (§. 105), wo $\psi$ eine reelle Zahl bedeutet,

$$tg\,(u + vi) = \frac{\sin(u + vi)}{\cos(u + vi)}$$

so folgt aus 52) und 53)

*) Um Missverständnisse zu vermeiden bemerke ich, dass manche Schriftsteller die reelle Grösse $\frac{e^v - e^{-v}}{2}$ den hyperbolischen Sinus nennen.

$$tg\,(u + vi) = \frac{\frac{e^v + e^{-v}}{2}\,sin\,u + \frac{e^v - e^{-v}}{2}\,cos\,u\,.\,i}{\frac{e^v + e^{-v}}{2}\,cos\,u - \frac{e^v - e^{-v}}{2}\,sin\,u\,.\,i}$$

$$= \frac{\frac{e^v + e^{-v}}{2}\,tg\,u + \frac{e^v - e^{-v}}{2}\,i}{\frac{e^v + e^{-v}}{2} - \frac{e^v - e^{-v}}{2}\,tg\,u\,.\,i}$$

also wenn $u = 0$

$$tg\,(vi) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^v}\,i$$

Erhebt man die Ausdrücke 52) und 53) ins Quadrat, so findet man

60) $[cos\,(u + vi)]^2 + [sin\,(u + vi)]^2 = 1$

Die Gleichung 8) des §. 95 gilt also auch noch wenn $x$ eine imaginäre Zahl ist.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 54) und 55) gehen die Gleichungen 52 und 53) über in

61) $cos\,(u + vi) = cos\,u\,.\,cos\,(vi) - sin\,u\,.\,sin\,(vi)$

62) $sin\,(u + vi) = sin\,u\,.\,cos\,(vi) + cos\,u\,.\,sin\,(vi)$

Die Gleichungen 11) und 12) des §. 95 gelten also auch noch wenn $x + y$ eine imaginäre Zahl ist, und ebenso gelten noch, wie man leicht sieht, die dortigen Gleichungen 13) und 14) wenn $x - y$ eine imaginäre Zahl ist.

Setzt man in 54) und 55) statt $v$ den Werth $-v$ so findet man, den Formeln 17) und 18) des §. 96 analog

63) $cos\,(-vi) = cos\,(vi)$; $sin\,(-vi) = -sin\,(vi)$

## 128.

Aus 54) folgt, wenn $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$2^n[cos(vi)]^n = (e^v + e^{-v})^n = e^{nv} + e^{-nv} + {}^n\mathfrak{B}^1(e^{(n-2)v} + e^{-(n-2)v}) + \ldots..$$

Diese Gleichung ist der Gleichung 43) analog und behandelt man sie auf dieselbe Weise, so findet man, je nachdem $n$ ungerade oder gerade

$$2^{n-1}[\cos(vi)]^n = \cos(nvi) + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos((n-2)vi)\ldots + {}^n\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}}\cos(vi)$$

oder

$$2^{n-1}[\cos(vi)]^n = \cos(nvi) + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos((n-2)vi)\ldots + {}^n\overset{\frac{n-2}{2}}{\mathfrak{B}}\cos(2vi) + \frac{1}{2}\,{}^n\overset{\frac{n}{2}}{\mathfrak{B}}$$

übereinstimmend mit den Formeln 44) und 45).

Eben so vollkommen übereinstimmend ist die Entwickelung einer Potenz eines hyperbolischen Sinus mit der in den Formeln 46) bis 49) enthaltenen Entwickelung der Potenz eines trigonometrischen Sinus. Da nemlich $\frac{1}{i} = -i$, so kann man statt der Gleichung 55) auch schreiben

$$-2i\,\sin(vi) = e^v - e^{-v}$$

Erhebt man diesen Ausdruck auf die $n$te Potenz, wo $n$ wieder eine ganze positive Zahl bedeutet, so folgt

$$2^n(-i)^n[\sin(vi)]^n = (e^v - e^{-v})^n = e^{nv} - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}e^{(n-2)v}\ldots\ldots \pm e^{-nv}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Da nun $(-i)^2 = -1$, so folgt für ein gerades $n$

$$\pm 2^{n-1}[\sin(vi)]^n = \cos(nvi) - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos((n-2)vi)\ldots\ldots \pm \frac{1}{2}\,{}^n\overset{\frac{n}{2}}{\mathfrak{B}}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k$ oder $4k+2$ enthalten ist. Die Zeichen der einzelnen Glieder der Entwickelung, vom ersten an gerechnet, folgen hier, in beiden Fällen, in derselben Weise auf einander wie in den zwei Formeln 46) und 47). Man hat also z. B.

$$2\,[\sin(vi)]^2 = -\cos(2vi) + 1$$

$$8\,[\sin(vi)]^4 = \cos(4vi) - 4\cos(2vi) + 3$$

Ist $n$ ungerade, so findet man

$$\pm 2^{n-1}[\sin(vi)]^n = \sin(nvi) - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin((n-2)vi)\ldots\ldots \pm {}^n\overset{\frac{n-1}{2}}{\mathfrak{B}}\sin(vi)$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k+1$ oder $4k+3$ enthalten ist. Auch hier

entspricht wieder die Entwickelung den zwei Formeln 48) und 49). Es ist z. B.

$$4\,[\sin(vi)]^3 = -\sin(3vi) + 3\sin(vi)$$
$$16\,[\sin(vi)]^5 = \sin(5vi) - 5\sin(3vi) + 10\sin(vi)$$

### 129.

Es wird der folgenden Entwickelungen wegen dienlich seyn die bisher gebrauchte Bezeichnung zu vereinfachen. Statt $\sin(vi)$ schreiben wir $\sin.vi$, wo also der Punkt hinter $\sin$ die Stelle der Klammer vertritt, ebenso schreiben wir $\cos.vi$ statt $\cos(vi)$. Soll $\sin.vi$ noch mit $i$ multiplicirt werden, so schreiben wir $\sin.vi.i$. Ebenso bedeutet $\sin.(v+t)i$ den Sinus der Zahl $(v+t)i$ und $\sin.(v+t)i.i$ dass dieser Sinus noch mit $i$ multiplicirt werden soll.

Aus $e^{-v} = \dfrac{e^{v}+e^{-v}}{2} - \dfrac{e^{v}-e^{-v}}{2} = \dfrac{e^{v}+e^{-v}}{2} + \dfrac{e^{v}-e^{-v}}{2}\,i.i$

folgt mit Rücksicht auf 54) und 55)

64) $\qquad e^{-v} = \cos.vi + \sin.vi.i$

analog der Formel 6) des §. 95. Ebenso

$$e^{-v_1} = \cos.v_1 i + \sin.v_1 i.i$$

und daher $e^{-(v+v_1)} = \cos.(v+v_1)i + \sin.(v+v_1)\,i.i$
$= (\cos.vi + \sin.vi.i)\,(\cos.v_1 i + \sin.v_1 i.i)$
also auch allgemein
$\cos.(v + v_1 + \ldots + v_n)\,i + \sin.(v + v_1 \ldots + v_n)\,i.i$
$= (\cos.vi+\sin.vi.i)\,(\cos.v_1 i+\sin.v_1 i.i)\ldots(\cos.v_n i+\sin.v_n i.i)$
und hieraus folgt, der Formel 16) des §. 95 entsprechend,

65) $\qquad (\cos.vi + \sin.vi.i)^n = \cos.nvi + \sin.nvi.i$

Da hier $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet, so kann man die linke Seite dieser Gleichung vermittelst der Binomialformel entwickeln. Da man aber hier nur reelle Glieder erhält, indem $\sin.vi.i$ sowie auch $\sin.nvi.i$ reelle Werthe sind, so kann man nicht, wie in §. 118, $\cos nvi$ und $\sin nvi$, durch Trennung des Reellen und Imaginären erhalten. Man kann sich aber hierzu eines anderen Verfahrens bedienen, welches man auch dort hätte anwenden können. Mit Rücksicht auf 63) folgt nemlich aus 65) auch

66) $(\cos . vi - \sin . vi . i)^n = \cos . nvi - \sin . nvi . i$
und mithin

67) $\cos . nvi = \frac{(\cos . vi + \sin . vi . i)^n + (\cos . vi - \sin . vi . i)^n}{2}$

68) $\sin . nvi . i = \frac{(\cos . vi + \sin . vi . i)^n - (\cos . vi - \sin . vi . i)^n}{2}$

Entwickelt man nun hier die rechtsstehenden Ausdrücke nach der Binomialformel, so ergiebt sich, dass man die Formeln 24, 25, 26, 27, des §. 118 unmittelbar auf den gegenwärtigen Fall übertragen kann, wenn man nur statt $a$ überall $vi$ an die Stelle setzt. Und da ferner wenn man in Formel 60) $u = 0$ setzt, $(\cos . vi)^2 + (\sin . vi)^2 = 1$ folgt, so sieht man dass auch die Formeln 35) des §. 122, 36) des §. 123, 37) und 38) des §. 124 ihre Geltung behalten, wenn man $vi$ statt $a$ setzt.

Es wurde oben (§. 125) bemerkt, dass man die Formeln 39) bis 42) mit Hülfe der Gleichung $\sin a = \sqrt{1 - z^2}$ finden könnte, wo $z = \cos a$. Da nun wenn $\cos . vi = z$ auch $\sin . vi = \sqrt{1 - z^2}$ so folgt, dass dieselben Formeln auch für $a = vi$ gelten.

## 130.

Obgleich die vorhergehenden Erörterungen eine grosse Aehnlichkeit zwischen den trigonometrischen und hyperbolischen Cosinus und Sinus nachweisen, so findet doch auch andererseits ein grosser Unterschied zwischen denselben statt. Es wurde nemlich früher (§. 99) nachgewiesen, dass die trigonometrischen Cosinus und Sinus, d. h. die Cosinus und Sinus einer reellen Zahl $a$, periodische Funktionen sind, indem sich bei ihnen, wenn $a$ fortwährend wächst, dieselben Werthe in derselben Ordnung, immerfort wiederholen. Diese Eigenschaft findet bei den hyperbolischen Cosinus und Sinus, d. h. bei den Cosinus und Sinus einer rein imaginären Zahl $vi$ nicht mehr statt; sie sind keine periodischen Funktionen. Ist nemlich $v$ eine positive Zahl, so haben die Reihen, welche den Werth von $\cos . vi$ und $\sin . vi$ angeben (Form. 58 u. 59),

nur positive Glieder; es wächst also der Zahlenwerth von $cos.vi$ und $sin.vi$ fortwährend mit $v$; dasselbe findet statt, wenn $v$ negativ ist, nur dass alsdann der Sinus negativ ist. Alle Eigenschaften der trigonometrischen Cosinus und Sinus, welche auf ihrer Periodicität beruhen, sind daher bei den hyperbolischen Cosinus und Sinus nicht mehr vorhanden. Hiermit ist ein beachtenswerther Umstand verbunden. Es giebt unzählig viel reelle Zahlen $a$, deren Sinus und Cosinus Null ist, und zwar sind, wie früher nachgewiesen wurde, die Zahlen, welche der Gleichung $cos\, a = 0$ genügen, in der Form $a = \pm (k + \frac{1}{2})\pi$, die Zahlen, welche der Gleichung $sin\, a = 0$ genügen, in der Form $a = \pm k\pi$ enthalten, wo $k$ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Dagegen giebt es keine rein imaginäre Zahl $vi$ für welche die Gleichungen $cos.vi = 0$, $sin.vi = 0$ Geltung haben. Denn, wie die Formel 58) zeigt, ist $cos.vi = 1$ wenn $v = 0$, für jeden anderen (positiven oder negativen) Werth von $v$ ist $cos.vi > 1$. Ferner ist nach Formel 59) $sin.vi = 0$ wenn $v = 0$, für jeden anderen (positiven oder negativen) Werth von $v$, hat $sin.vi$ einen Werth, welcher, abgesehen vom Zeichen, grösser als Null ist. Dasselbe gilt auch von den Cosinus und Sinus complexer Zahlen. Gäbe es nemlich eine complexe Zahl $u + vi$, für welche die Gleichung $cos(u + vi) = 0$ statt fände, so hätte man (Form. 52)

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} cos\, u - \frac{e^v - e^{-v}}{2} sin\, u . i = 0$$

Diese Gleichung würde also in die zwei Gleichungen

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} cos\, u = 0$$

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} sin\, u = 0$$

zerfallen. Da nun $\frac{e^v + e^{-v}}{2}$ für keinen reellen Werth von $v$ Null werden kann, so müsste, wenn der ersten dieser Gleichungen genügt werden soll, $cos\, u = 0$ seyn, mithin $sin\, u = \pm 1$.

Die zweite dieser Gleichungen könnte also nur dann statt finden, wenn $\frac{e^{v} - e^{-v}}{2} = 0$, woraus $v = 0$ folgen würde. Auf dieselbe Weise findet man aus Formel 53) dass auch die Gleichung $\sin(u + vi) = 0$ nicht statt haben kann, wenn nicht $v = 0$.

Es folgt also hieraus, dass den Gleichungen $\cos x = 0$ und $\sin x = 0$ nur durch reelle Werthe von $x$ genügt werden kann.

## Zwölftes Kapitel.

## Die unendlichen Produkte.

---

### 131.

Indem wir im Beginn der algebraischen Analysis das Verfahren, durch welches die Arithmetik Zahlen ausdrückt, zu Grunde legten (§. 3), haben wir bisher überall, wo ein Werth durch eine ins Unendliche fortgesetzte Folge arithmetischer Ausdrücke berechnet werden sollte, hierzu ausschliesslich die Form der unendlichen Reihe angewandt. Diese Form ist, sobald man nur die Bequemlichkeit des Rechnens berücksichtigt, unzweifelhaft die beste, da sie auf den einfachsten Operationen, dem Addiren und Subtrahiren beruht, je nachdem die Glieder der Reihe positiv oder negativ sind. Will man aber höhere arithmetische Operationen anwenden, so sind offenbar noch viele andere Arten ins Unendliche fortgesetzter Entwickelungen denkbar, durch welche man irgend einen Werth ausdrücken kann. Hiermit eröffnet sich der Analysis ein neues weites Gebiet. Denn diese mannigfachen Entwickelungen können, je nach ihrer Eigenthümlichkeit, zu Beziehungen führen, welche mit Hülfe der Reihen schwer oder gar nicht zu entdecken sind. Es ist aber auch vorauszusehen, dass mit der grösseren Verwickelung der Operationen die Resultate ebenfalls im Allgemeinen verwickelter ausfallen und daher ihre nützlichen Anwendungen abnehmen werden.

132.

Sowie nach dem Addiren und Subtrahiren das **Multipliciren** und **Dividiren** die einfachsten Operationen der Arithmetik sind, so sind auch die auf ihrer fortgesetzten Anwendung beruhenden Formen der Entwickelung, welche unter dem Namen der **unendlichen Produkte** und der **unendlichen Kettenbrüche** bekannt sind, nach den unendlichen Reihen die interessantesten und einfachsten. Diese sollen im Folgenden betrachtet und damit die algebraische Analysis abgeschlossen werden.

Denkt man sich eine Reihe nach irgend einem Gesetze gebildeter Ausdrücke $u_1, u_2 \ldots u_n$ und multiplicirt man sie, in der Ordnung, wie sie aufeinander folgen, miteinander, so erhält man das Produkt

$$P = u_1 \,.\, u_2 \,.\,.\,.\,.\, u_n$$

Lässt man $n$ unbegrenzt wachsen, so nennt man das Produkt ein **unendliches**. Bei einem solchen unendlichen Produkte sind, wie bei den unendlichen Reihen (§. 43), drei Fälle zu unterscheiden. Entweder nähert sich, mit unbegrenzt wachsendem $n$, der Werth von $P$ einem bestimmten Werthe $W$ unbegrenzt, so dass $W = lim\, P$, alsdann **convergirt** das unendliche Produkt, und wir nennen $W$ seinen **Werth**. Oder $P$ nähert sich, bei unbegrenzt wachsendem $n$, je nach Beschaffenheit der Zahl $n$, verschiedenen bestimmten Werthen unbegrenzt, dann **oscillirt** das unendliche Produkt. Endlich kann $P$ mit unbegrenzt wachsendem $n$ über jede angebbare Zahl hinauswachsen, dann **divergirt** das unendliche Produkt. Es ist aber hier, ähnlich wie bei den Reihen (§. 76) darauf zu achten, dass weder die Ordnung der Faktoren geändert, noch ein Faktor in mehrere zerlegt wird, oder mehrere Faktoren vereinigt werden. Es ist z. B. klar, dass das Produkt $2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\,.\,.\,.$ zwischen den Werthen 2 und 1 oscillirt, während das Produkt $1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \ldots$ den Werth 1 hat. Da es für den **Zahlenwerth** des Produktes gleichgültig ist, ob die einzelnen Faktoren **positiv** oder **negativ** sind, so soll in der Folge, bei Erörterung der Frage, zu wel-

cher der drei genannten Gattungen ein Produkt gehört, immer zur Einfachheit vorausgesetzt werden, dass sämmtliche Faktoren positiv sind.

Wie die Beschaffenheit einer Reihe nicht von deren ersten Gliedern abhängt (§. 46), so sind auch die ersten Faktoren für die Beschaffenheit des Produkts gleichgültig. Es kommt nur darauf an, dass sie, von irgend einem bestimmten Faktor an, gewissen Bedingungen Genüge leisten, und es soll daher im Folgenden angenommen werden, dass dies gleich von Anfang an der Fall ist, indem die etwa vorhandenen unregelmässigen Anfangsglieder vernachlässigt werden.

133.

Wenn sämmtliche Faktoren eines unendlichen Produkts um ein Angebbares grösser als die Einheit sind, so muss das Produkt divergiren. Ist nemlich jeder Faktor grösser als $1+k$ und $k>0$, so ist das Produkt von $r$ Faktoren grösser als $(1+k)^r$. Nun ist $(1+k)^r = 1+rk+\frac{r.r-1}{1.2}k^2+\ldots$ d. h. $(1+k)^r > 1+rk$, mithin wenn $r$ unbegrenzt wächst, so wächst auch $(1+k)^r$ unbegrenzt, und umsomehr muss das unendliche Produkt unbegrenzt wachsen. Sind dagegen sämmtliche Faktoren um ein Angebbares kleiner als die Einheit, so ist der Werth des Produktes $=0$. Denn in diesem Falle ist jeder Faktor kleiner als $\frac{1}{1+k}$, wo wieder $k$ eine Zahl bedeutet die $>0$ ist, mithin das Produkt von $r$ Faktoren kleiner als $\frac{1}{(1+k)^r}$. Bei unbegrenzt wachsendem $r$ ist also das Produkt kleiner als ein Ausdruck, welcher sich unbegrenzt der Null nähert, da nun das Produkt, insofern es nur aus positiven Gliedern besteht, nicht negativ werden kann, so muss es sich ebenfalls unbegrenzt der Null nähern.

Sind die Faktoren eines Produktes, theils um ein Angebbares grösser, theils um ein Angebbarrs kleiner, als die Einheit, so lassen sich, bei der grossen Mannigfaltigkeit der möglichen Aufeinanderfolge der Faktoren, keine allgemeinen Re-

geln mehr geben, so wenig dies bei Reihen möglich ist, wenn, theils der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder grösser, theils kleiner, als die Einheit ist (vgl. §. 49).

Es bedürfen daher nur diejenigen Produkte eine weitere Untersuchung, bei welchen sich die einzelnen Faktoren unbegrenzt der Einheit nähern; wir wollen deswegen im Folgenden immer stillschweigend voraussetzen, dass nur von solchen Produkten die Rede ist. Man setze

$$1) \qquad P = (1 + k_1)\,(1 + k_2)\ldots(1 + k_n)$$

wo $k_1, k_2 \ldots$ positive oder negative Grössen bedeuten, deren Zahlenwerth kleiner als die Einheit ist und welche mit unbegrenzt wachsendem $n$ unbegrenzt abnehmen; es sind nun Kennzeichen aufzufinden, aus welchen sich die Beschaffenheit von $\lim P$, bei unbegrenzt wachsendem $n$, ergiebt.

Da schon früher (Kap. 6) solche Kennzeichen zur Beurtheilung der Beschaffenheit einer Reihe aufgefunden worden sind, so liegt der Gedanke nahe die Beurtheilung der Beschaffenheit von $\lim P$ auf die der Beschaffenheit einer oder mehrerer Reihen zurückzuführen. Dies kann in folgender Weise geschehen.

### 134.

Sind die Grössen $k_1, k_2, \ldots$ sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ, so hat man in beiden Fällen

$$(1 + k_1)\,(1 + k_2) = 1 + k_1 + k_2 + k_1 k_2$$

also, da $k_1 k_2$ positiv ist,

$$(1 + k_1)\,(1 + k_2) > 1 + k_1 + k_2$$

Hieraus folgt

$$(1 + k_1)\,(1 + k_2)\,(1 + k_3) > (1 + k_1 + k_2)\,(1 + k_3)$$

d. h.

$$(1 + k_1)\,(1 + k_2)\,(1 + k_3) > 1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_1 k_3 + k_2 k_3$$

und mithin

$$(1 + k_1)\,(1 + k_2)\,(1 + k_3) > 1 + k_1 + k_2 + k_3$$

da $k_1 k_3$ und $k_2 k_3$ positiv sind.

Man sieht dass sich dies Verfahren auf jede Anzahl Faktoren ausdehnen lässt und findet daher allgemein

$$2) \qquad P = (1 + k_1)\,(1 + k_2)\ldots(1 + k_n) > 1 + k_1 + k_2 \ldots + k_n$$

Man nehme nun zuerst an, die Grössen $k_1$, $k_2 \ldots$ seyen sämmtlich positiv. Ist alsdann die Reihe

3) $$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

eine divergirende, so muss umsomehr $P$ divergiren. Convergirt dagegen diese Reihe, so giebt es immer einen endlichen Werth $r$, so dass $lim\ (k_r + k_{r+1} \ldots) < 1$. Alsdann hat man aber, wie schon in §. 76 gezeigt wurde,

$$lim[(1+k_r)(1+k_{r+1})\ldots] < lim[1+(k_r+k_{r+1}\ldots)+(k_r+k_{r+1}\ldots)^2+\ldots]$$

und $lim\, P$ hat daher einen endlichen Werth. Hieraus folgt der Satz: wenn $k_1$, $k_2 \ldots$ sämmtlich positiv sind, so convergirt oder divergirt das Produkt $P$, je nachdem die Reihe 3) convergirt oder divergirt.

Sind die Grössen $k_1$, $k_2 \ldots$ sämmtlich negativ, so kann das Produkt $P$ nicht divergiren und nicht oscilliren, da jeder folgende Faktor, wenn er mit dem Produkte der vorhergehenden multiplicirt wird, ein kleineres Produkt giebt, und da $P$ auch nicht negativ werden kann, so kann $lim\, P$ nur entweder einen endlichen positiven Werth haben oder Null seyn. Ist die Reihe 3) convergent, so kann man wieder $k_r$ so wählen, dass der Zahlenwerth von $(k_r + k_{r+1} + \ldots)$ kleiner als die Einheit ist. Setzt man $lim\ (k_r + k_{r+1} + \ldots) = -w$ (wo also $w$ einen positiven Werth bezeichnet der kleiner als die Einheit ist) so ist nach Form. 2)

$$lim\ [(1 + k_r)(1 + k_{r+1}) \ldots] > 1 - w$$

also

$$lim\ P > (1 + k_1) \ldots (1 + k_{r-1})(1 - w)$$

nun hat $1 - w$ einen endlichen positiven Werth, folglich auch $P$. Divergirt dagegen die Reihe 3) so wird $P$ Null seyn. Denn da allgemein $1 + k_r = \dfrac{1}{1 - \dfrac{k_r}{1 + k_r}}$, so hat man auch

$$P = \frac{1}{1 - \dfrac{k_1}{1 + k_1}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{k_2}{1 + k_2}} \cdots\cdots$$

oder wenn man $Q = \left(1 - \dfrac{k_1}{1 + k_1}\right)\left(1 - \dfrac{k_2}{1 + k_2}\right) \ldots$

setzt, $$P = \frac{1}{Q}$$

Nun sind sämmtliche Faktoren, aus denen $Q$ besteht, positiv, also (nach Form. 2)

$$Q > 1 - \frac{k_1}{1+k_1} - \frac{k_2}{1+k_2} - \ldots.$$

Da aber allgemein $\frac{-k_r}{1+k_r} > -k_r$ (weil $1+k_r < 1$) so ist um so mehr

$$Q > 1 - k_1 - k_2 \ldots$$

d. h. $Q$ divergirt und mithin ist $\lim P = 0$.

135.

Sind dagegen die Grössen $k_1, k_2 \ldots$ theils positiv theils negativ, also die Faktoren $1+k_1$, $1+k_2 \ldots$ theils grösser theils kleiner als die Einheit, so bedarf dieser Fall nur dann einer besonderen Untersuchung, wenn sowohl die Faktoren, welche grösser, als die, welche kleiner als die Einheit sind, in unbegrenzter Zahl vorkommen, weil wenn nur die Faktoren der einen oder der anderen Gattung in unbegrenzter Zahl vorhanden wären, die Untersuchung auf den früheren Fall zurückkäme. Man nehme daher an, dass sowohl $m_1, m_2 \ldots$ als $l_1, l_2 \ldots$ positive Werthe bezeichnen, die kleiner als die Einheit sind, und setze, indem man die Faktoren jeder Gattung zusammenstellt,

$$(1 + k_1)(1 + k_2) \ldots . (1 + k_n) =$$
$$(1+m_1)(1+m_2)\ldots(1 + m_s)(1 - l_1)(1 - l_2)\ldots(1 - l_t)$$

so dass $s + t = n$. Man setze

$$Q = (1 + m_1)(1 + m_2) \ldots (1 + m_s)$$
$$Q' = (1 - l_1)(1 - l_2) \ldots (1 - l_t)$$

also

$$P = QQ'$$

Ferner sey

$$q = \lim (m_1 + m_2 + \ldots + m_s)$$
$$q' = \lim (l_1 + l_2 + \ldots + l_t)$$

Je nachdem $q$ eine endliche Grösse oder unendlich ist, wird auch $\lim Q$ eine endliche Grösse oder unendlich seyn. Ebenso wird

*lim* $Q'$ eine endliche (von Null verschiedene) Grösse oder Null seyn, je nachdem *lim* $q'$ einen endlichen Werth hat oder unendlich ist.

Demnach sind hier folgende Fälle zu unterscheiden. Sind $q$ und $q'$ endliche Grössen, so hat *lim* $P$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth. Ist $q$ endlich, $q'$ dagegen unendlich, so ist *lim* $P = 0$. Ist $q$ unendlich, $q'$ endlich, dann divergirt $P$. Sind aber $q$ und $q'$ beide unendlich, so ist *lim* $Q$ unendlich, *lim* $Q' = 0$, dann erscheint *lim* $P$ in der Form $\infty . 0$, welche es zweifelhaft lässt, ob *lim* $P$ einen bestimmten Werth hat.

Ist z. B. $P = (1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^3})(1 - \frac{1}{2^4}) \ldots$

so ist $$q = lim\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots)$$
$$q' = lim\,(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots)$$

$q$ und $q'$ sind also endliche Grössen, mithin auch $P$ eine endliche positive Grösse.

Ist $P = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4^2}) \ldots$

so ist $$q = lim\,(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots)$$
$$q' = lim\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots)$$

also $q'$ divergent (§. 45) und $q$ convergent (§. 61), mithin *lim* $P = 0$.

Ist dagegen
$$P = (1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{4^2}) \ldots$$
so ist nun $q$ divergent, $q'$ convergent, also $P$ divergent.

Ist $P = (1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7})(1 + \frac{1}{7}) \ldots$

so sind $q$ und $q'$ beide divergent, und die Beschaffenheit von $P$ bleibt zweifelhaft. Indessen kann man sich hier leicht überzeugen, dass $P$ einen positiven endlichen Werth hat. Denn

es ist $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{5})\ldots(1-\frac{1}{2r-1})(1+\frac{1}{2r-1})$ $=(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{5^2})\ldots(1-\frac{1}{(2r-1)^2})$. Lässt man $r$ unbegrenzt wachsen, so ist (§. 134) die Grenze des letzteren unendlichen Produktes ein endlicher positiver Werth, da die Reihe $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$ convergirt. Hieraus folgt weiter dass bei unbegrenzt wachsendem $r$ auch die Grenze des Produktes $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{2r-1})(1+\frac{1}{2r-1})(1-\frac{1}{2r+1})$ einen positiven endlichen Werth hat, da $lim\,(1-\frac{1}{2r+1})=1$. Wie viel Faktoren man also zur Berechnung von $P$ anwendet, immer erhält man einen positiven endlichen Werth, mithin ist auch $lim\ P$ ein solcher Werth.

## 136.

Will man die Theorie der Logarithmen zu Hülfe nehmen, so kann man die Beurtheilung von $P$ noch in anderer Weise auf die zweier Reihen zurückführen, welche in vielen Fällen auch dann noch über die Beschaffenheit des Produktes Aufschluss giebt, wo die vorhergehende Regel ihren Dienst versagt.

In der Reihe

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots.$$

ist, wenn $x$ positiv und $\not< 1$ ist, jedes Glied grösser als das folgende und die Zeichen abwechselnd positiv und negativ, der Werth der Reihe ist $log\,(1+x)$ und man hat daher (§. 59)

$$log\,(1+x)<x$$
$$>x-\frac{x^2}{2}$$

und um so mehr

$$log\,(1+x)<x$$
$$>x-x^2$$

Da, wenn noch immer $x$ positiv und $< 1$ vorausgesetzt wird,

$$log\,(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

so folgt

$$log\,(1-x) < -x$$

Zugleich ist $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots < \frac{x^2 + x^3 + x^4 \ldots.}{2}$

d. h. $< \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$ (§. 47), ist daher $x < \frac{1}{2}$ mithin

$2\,(1-x) > 1$, so ist $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots < x^2$ also

$$log\,(1-x > -x - x^2$$

Es folgt hieraus, dass wenn $x$ eine positive oder negative Zahl bedeutet, deren Zahlenwerth $< \frac{1}{2}$ ist, immer

$$log\ 1 + x) < x$$
$$> x - x^2$$

seyn wird.

Nun kann man, wie schon oben bemerkt wurde, immer annehmen, dass in dem Produkte

$$P = (1 + k_1)\,(1 + k_2) \ldots\ldots (1 + k_n)$$

die Grössen $k_1$, $k_2 \ldots$ sämmtlich $< \frac{1}{2}$ sind. Man hat also $log\,(1 + k_1) < k_1$ und $log\,(1 + k_1) > k_1 - k_1{}^2$. Versteht man unter $n_1$ eine gewisse positive Zahl, die kleiner als 1 ist, so kann man daher $log\,(1 + k_1) = k_1 - n_1 k_1{}^2$ setzen; versteht man unter $n_2$, $n_3 \ldots$ ebenfalls positive Zahlen, die kleiner als 1 sind, so kann man ebenso $log\,(1 + k_2) = k_2 - n_2 k_2{}^2$, $log\,(1 + k_3) = k_3 - n_3 k_3{}^2$ u.s.w. setzen. Man hat mithin

$$log\,P = log\,(1 + k_1) + log\,(1 + k_2) + log\,(1 + k_3) \ldots + log\,(1 + k_n)$$
$$= k_1 + k_2 \ldots. + k_n - n_1 k_1{}^2 - n_2 k_2{}^2 \ldots. - n_n k_n{}^2$$

Man setze

$$p_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$
$$q_n = k_1{}^2 + k_2{}^2 + \ldots + k_n{}^2$$

Bezeichnet man die grösste unter den Zahlen $n_1$, $n_2 \ldots$ durch $N$, die kleinste durch $N_0$ so ist demnach

4) $$log\,P > p_n - N q_n$$
$$< p_n - N_0 q_n$$

Da aber $P = e^{\log P}$, wenn $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, so sind folgende Fälle zu unterscheiden. Ist, bei unbegrenzt wachsendem $n$, $\lim \log P$ ein endlicher Werth $A$, so ist auch $\lim P$ ein endlicher von Null verschiedener Werth $e^A$. Ist $\lim \log P = \infty$, so ist $\lim P = e^{\infty} = \infty$; ist $\lim \log P = -\infty$ so ist $\lim P = e^{-\infty} = 0$.

Nun kann $p_n$ positive und negative Glieder enthalten, während $q_n$ nur aus positiven Gliedern besteht; $q_n$ kann also nur endlich oder $= \infty$ seyn, während $p_n$ endlich oder $\pm \infty$ seyn kann, oder auch in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ erscheinen kann.

Demnach ergeben sich aus Formel 4) folgende Resultate:

I) Ist $\lim p_n$ sowie $\lim q_n$ eine endliche Grösse, so ist auch $\lim \log P$ und mithin auch $\lim P$ eine endliche von Null verschiedene Grösse.

II) Ist $\lim p_n$ eine endliche Grösse, $\lim q_n$ aber unendlich, so ist $\lim \log P < \lim (p_n - N_0 q_n)$ d. h. kleiner als ein Ausdruck, welcher einen negativen unbegrenzt wachsenden Werth hat, mithin muss man $\lim \log P = -\infty$ setzen, woraus $\lim P = 0$ folgt.

III) Ist $\lim p_n = -\infty$ während $\lim q_n = \infty$ oder auch einen endlichen Werth hat, so findet man, wie im vorhergehenden Falle $\lim P = 0$.

IV) Ist $\lim p_n = \infty$, während $\lim q_n$ einen endlichen Werth hat, so ist $\lim \log P > \lim (p_n - N q_n)$ also $\lim \log P$ grösser als eine unbegrenzt wachsende positive Zahl, mithin $\lim P = \infty$.

V) Ist $\lim p_n = \infty$ und zugleich $\lim q_n = \infty$, so nehmen die Grenzen der Ausdrücke $p_n - N q_n$ und $p_n - N_0 q_n$ die Form $\infty - \infty$ an, welche sowohl einen endlichen Werth als $\pm \infty$ bezeichnen kann, der Werth von $\lim \log P$ und mithin auch von $\lim P$ bleiben also unbestimmt.

## 137.

Um das Verhältniss dieser neuen Regel zu der früheren zu beurtheilen, bemerke man, dass $\lim p_n = q - q_1$. Die frühere Regel lässt nun den Werth von $\lim P$ unbestimmt so-

bald $q$ und $q'$ beide unendlich sind; hierbei kann aber $\lim p_n = q - q'$ endlich oder auch $\pm\infty$ seyn, dann bestimmt die neue Regel den Werth nach I, II, III oder IV. Wir haben z. B. oben das Produkt

$$P = (1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{5}) \ldots$$

betrachtet und gefunden, dass die frühere Regel hier nicht $\lim P$ bestimmt. Nun ist aber

$$p_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \ldots .$$

also $\lim p_n = 0$, während $\lim q_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$ $= 2 (\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots)$ einen endlichen Werth hat, nach I ist also $\lim P$ ein endlicher positiver Werth, wie schon oben gefunden wurde. Sey ferner

$$P = (1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}})(1 - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}})(1 + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}})(1 - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}) \ldots .$$

wo man allgemein unter $r^{\frac{1}{2}}$ die positive Quadratwurzel aus $r$ versteht.

Hier ist

$$q = \lim (\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} + \ldots)$$

$$q_1 = \lim (\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} + \ldots)$$

Setzt man

$$w = \lim (\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \ldots .)$$

so ist $w = q + q'$. Nach §. 61 ist aber $w$ divergent, folglich auch $q = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}(1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \ldots)$ und mithin auch $q_1$. Denn da $q - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} + \ldots$ divergirt, und

$\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}}$ u. s. w. so muss um so mehr $q_1$ divergiren. Die frühere Regel entscheidet mithin nicht über den Werth von *lim P*. Es ist aber ferner

$$p_n = lim\,(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$$

und da in dieser Reihe die Glieder unbegrenzt abnehmen und abwechselnde Zeichen haben, so hat $p_n$ einen endlichen Werth. Ferner ist

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdot\cdot\cdot$$

also divergent, mithin nach II), *lim* $P = 0$.

Dagegen wird unter der in V) gemachten Voraussetzung, wo die zweite Regel keine Entscheidung giebt, *lim P* durch die erste Regel bestimmt, sobald nicht $q$ und $q'$ zugleich unendlich sind. Ist z. B.

$$P = (1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}})\,(1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}})\,(1 + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}) \cdot\cdot\cdot\cdot$$

so ist $p_n = lim\,(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \cdot\cdot\cdot\cdot) = \infty$

$$q_n = lim\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot\cdot\cdot\cdot) = \infty$$

Da aber $q = \infty$ und $q' = 0$ so folgt nach der ersten Regel *lim* $P = \infty$.

Verbindet man beide Regeln, so bleibt also die Beschaffenheit von $P$ nur dann zweifelhaft, wenn $q$ und $q'$ beide unendlich sind und zugleich entweder $p_n$ welches zunächst, weil es $q - q'$ ist, in der Form $\infty - \infty$ erscheint, in Wahrheit $\infty$ ist, während zugleich $q_n = \infty$ ist, oder der Werth von $p_n$ nicht bestimmt werden kann, in welchem Falle natürlich die Beschaffenheit von $P$ auch dann noch zweifelhaft bleibt, wenn $q_n$ einen endlichen Werth hat.

### 138.

Man kann jedes Produkt in eine gleichgeltende Reihe verwandeln. Man hat nemlich

$$(1+k_1)(1+k_2) = 1 + k_1 + (1+k_1)k_2$$

folglich

$$(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) = 1 + k_1 + (1+k_1)k_2 + (1+k_1)(1+k_2)k_3$$

und indem man so fortfährt, findet man

$$P = (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n) = (1+k_1) + (1+k_1)k_2 + (1+k_1)(1+k_2)k_3\dots$$
$$+ (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_{n-1})k_n$$

Auch diese Formel kann man mitunter benutzen um die Beschaffenheit von *lim* $P$ zu finden, indem man die Beschaffenheit der gleichgeltenden Reihe untersucht. Bezeichnet man in dieser Reihe das $r$te Glied durch $t_r$ so ist

$$t_{r-1} = (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_{r-2})k_{r-1}$$

$$t_r = (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_{r-1})k_r$$

und

$$\frac{t_r}{t_{r-1}} = (1+k_{r-1})\frac{k_r}{k_{r-1}}$$

Je nachdem also $\lim\left[\frac{k_r}{k_{r-1}}(1+k_{r-1})\right]$ grösser oder kleiner als die Einheit ist, wird die Reihe und mithin auch $P$ divergiren oder convergiren. Ist $\lim\left[\frac{k_r}{k_{r-1}}(1+k_{r-1})\right] = 1$, so können die weiteren Regeln benutzt werden, die wir früher für diesen Fall gegeben haben.

Man bemerke noch gelegentlich, dass man auch umgekehrt jede gegebene Reihe in ein gleichgeltendes Produkt verwandeln kann. Denn man sieht sogleich, dass

$$t_1 + t_2 \dots + t_n = t_1\left(\frac{t_1+t_2}{t_1}\right)\left(\frac{t_1+t_2+t_3}{t_1+t_2}\right)\dots\left(\frac{t_1+t_2\dots+t_n}{t_1+t_2\dots+t_{n-1}}\right)$$

ist.

## Dreizehntes Kapitel.

# Die Kettenbrüche.

### 139.

Besteht ein Ausdruck aus zwei durch Addition oder Subtraktion verbundenen Theilen, von denen der zweite in Form eines Bruches erscheint, dessen Nenner wieder aus zwei solchen Theilen besteht, von welchen der zweite in Form eines Bruches erscheint, so nennt man diesen Ausdruk einen Kettenbruch. Z. B. der Ausdruck $a_0 + \frac{b_1}{B_1}$ besteht aus zwei Theilen, von welchen der zweite in Form eines Bruches erscheint. Ist nun aber $B_1 = a_1 + \frac{b_2}{B_2}$ so ist $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{B_2}}$ ein Kettenbruch. Es könnte nun aber wieder $B_2 = a_2 + \frac{b_3}{B_3}$ seyn, wodurch man den Kettenbruch $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{B_3}}}$ erhielte, und indem man so fortgeht sieht man dass

$$1) \qquad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 \, \vdots + \cfrac{b_m}{a_m}}}}$$

die allgemeine Form eines Kettenbruches ist. Es ist bei dieser Schreibweise immer zu berücksichtigen, dass jeder unmittelbar über einem Divisionsstriche stehende Ausdruck als Zähler anzusehen ist, zu welchem Alles, was unter diesem Divisionsstriche folgt, als Nenner gehört.

Die Ausdrücke $a_0$, $a_1$, $a_2 \ldots b_1$, $b_2 \ldots$ können jeden beliebigen Werth haben, sie können ganze oder gebrochene,

rationale oder irrationale, reelle oder imaginäre Zahlen seyn. Im Folgenden wird jedoch immer vorausgesetzt, dass sie reell sind. Je nachdem $m$ einen endlichen Werth hat, oder unbegrenzt wächst, ist der Kettenbruch 1) ein endlicher oder ein unendlicher. Die Grössen $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sind die Theilnenner des Kettenbruches, die Grössen $b_1, b_2 \ldots$ seine Theilzähler, auch ist $\frac{b_1}{a_1}$ das erste Glied, $\frac{b_2}{a_2}$ das zweite, allgemein $\frac{b_k}{a_k}$ das $k$te Glied des Kettenbruches.

Ist $m$ eine endliche Zahl, so kann man den Kettenbruch 1) immer auf einen gewöhnlichen Bruch zurückführen, welchen man seinen reducirten Werth nennt. Man verwandle zuerst den Theil $a_0 + \frac{b_1}{a_1}$ in einen gewöhnlichen Bruch, wodurch man $\frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}$ erhält, setzt man in diesem Ausdruck $a_1 + \frac{b_2}{a_2}$ statt $a_1$ so folgt

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}} = \frac{a_0\left(a_1 + \frac{b_2}{a_2}\right) + b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}$$

In diesem Ausdrucke könnte man wieder $a_2 + \frac{b_3}{a_3}$ statt $a_2$ setzen und erhielte hierdurch den reducirten Werth von $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}}$ und indem man so fortfährt, erhält man zuletzt den reducirten Werth des ganzen Kettenbruches 1).

Dies Verfahren lässt sich aber abkürzen. Man bezeichne durch $A_k$ den Zähler, durch $B_k$ den Nenner des reducirten Werthes des Kettenbruches $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{b_k}{a_k}}}}$, was in der Folge

kürzer so ausgedrückt werden soll, dass wir $A_k$ den Zähler, $B_k$ den Nenner dieses Kettenbruches nennen. Man setze auch noch $A_0 = a_0$, $B_0 = 1$ so hat man mithin

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{A_2}{B_2} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}} \quad \text{u. s. w.}$$

Es wird hierbei vorausgesetzt dass im Laufe der Rechnung keine etwa mögliche Zurückführung eines Bruches, auf kleinere Benennung vorgenommen worden ist *). Die Werthe $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2} \ldots$ nennen wir den nullten, ersten, zweiten Näherungsbruch des Kettenbruches 1). Nun wurde gefunden $A_1 = a_0 a_1 + b_1$; $B_1 = a_1$; $A_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 b_2 + a_2 b_1$; $B_2 = a_1 a_2 + b_2$. Schreibt man $A_2 = a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0$ und setzt $A_1$ statt $a_0 a_1 + b_1$ und $A_0$ statt $a_0$ so hat man $A_2 = a_2 A_1 + b_2 A_0$ und wenn man $B_1$ statt $a_1$ und $B_0$ statt 1 setzt, $B_2 = a_2 B_1 + b_2 B_0$. Man kann nun aber leicht zeigen, dass die Formel, vermöge deren man hier $A_2$ aus den zwei vorhergehenden $A$, und $B_2$ aus den zwei vorhergehenden $B$ findet, allgemein statt hat, es ist nemlich

2) $$A_k = a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2}$$

3) $$B_k = a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2}$$

Man nehme an, diese Formel sey bis zu einem bestimmten $k$ richtig, man habe also

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2}}{a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2}}$$

um hieraus $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ zu finden, hat man $a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ statt $a_k$ zu setzen und es ist demnach

---

*) Also z. B. wenn der Kettenbruch $1 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{4}{5}} = \frac{A_2}{B_2}$ gesetzt wird, so ist $A_2 = 34$, $B_2 = 24$ und nicht etwa $A_2 = 17$, $B_2 = 12$.

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \frac{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) A_{k-1} + b_k A_{k-2}}{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) B_{k-1} + b_k B_{k-2}}\,.$$

mithin, wenn man die Brüche wegschafft,

$$A_{k+1} = (a_k a_{k+1} + b_{k+1}) A_{k-1} + a_{k+1} b_k A_{k-2}$$
$$= a_{k+1} (a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2}) + b_{k+1} A_{k-1}$$
$$B_{k+1} = (a_k a_{k+1} + b_{k+1}) B_{k-1} + a_{k+1} b_k B_{k-2}$$
$$= a_{k+1} (a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2}) + b_{k+1} B_{k-1}$$

oder

$$A_{k+1} = a_{k+1} A_k + b_{k+1} A_{k-1},$$
$$B_{k+1} = a_{k+1} B_k + b_{k+1} B_{k-1}.$$

Es ist also bewiesen, dass die Formeln 2) und 3) auch noch gelten, wenn man $k + 1$ statt $k$ setzt, sobald sie für $k$ gelten. Nun haben wir ihre Richtigkeit für $k = 2$ unmittelbar nachgewiesen, folglich sind sie auch für alle grösseren Werthe von $k$ gültig. Will man dieselben auch noch auf den Fall $k = 1$ ausdehnen, so dass also

$$A_1 = a_1 A_0 + b_1 A_{-1}$$
$$B_1 = a_1 B_0 + b_1 B_{-1}$$

so hat man nur $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$ zu setzen, dann ist in der That $A_1 = a_1 a + b_1$, $B_1 = a_1 \,.\, 1 + b_1 \,.\, 0 = a_1$.

Die Formeln 2) und 3) sind also wahre Recursionsformeln. Sobald man $A_0$ und $B_0$ als bekannt voraussetzt, kann man vermittelst derselben jeden Zähler und Nenner jedes folgenden Näherungsbruches und zuletzt auch $\frac{A_m}{B_m}$, d. h. den Werth des Kettenbruchs 1) finden.

## 140.

Man kann aber diesen Werth auch finden, indem man die Reduktion des Kettenbruchs 1) in umgekehrter Ordnung vornimmt. Man bezeichne durch $C_k$ den Zähler, durch $D_k$ den Nenner des Kettenbruchs

4) $$a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots + \frac{b_m}{a_m}}}.$$

Man hat demnach $\frac{C_{k-1}}{D_{k-1}} = a_{k-1} + \frac{b_k}{C_k : D_k}$, also

$$C_{k-1} = a_{k-1}\, C_k + b_k\, D_k;\ D_{k-1} = C_k$$

und daher auch

5) $$C_{k-1} = a_{k-1}\, C_k + b_k\, C_{k+1}$$

Setzt man nun zuerst $k = m - 1$ und berechnet Zähler und Nenner von $a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m}$ also

$$C_{m-1} = a_{m-1}\, a_m + b_m;\ C_m = a_m$$

so kann man hieraus vermöge der Recursionsformel 5) allmälich $C_{m-2}$, $C_{m-3}$ ... und zuletzt $C_1 = B_m$, $C_0 = A_m$ finden.

Es folgt zugleich hieraus die merkwürdige Thatsache, dass der Zähler des Kettenbruchs 1) identisch ist mit dem Zähler des Kettenbruchs

6) $$a_m + \frac{b_m}{a_{m-1} + \frac{b_{m-1}}{a_{m-2} + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots + \frac{b_1}{a_0}}}}$$

Denn, mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung, sey $c_k$ der Zähler, $d_k$ der Nenner des Kettenbruches

$$a_m + \frac{b_m}{a_{m-1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots + \frac{b_{k+1}}{a_k}}}$$

Der Zähler des Kettenbruches 6) ist also $c_0$ und es soll, nach unserer Behauptung, $c_0 = C_0$ seyn. Es ist nun leicht zu zeigen, dass wenn von $k = m - 1$ bis $k = h$ wirklich $c_k = C_k$ ist, dies auch noch der Fall seyn wird, wenn man $k = h - 1$ setzt. Nach §. 139 Form. 2 ist nemlich der Zähler des Kettenbruches

$$a_m + \cfrac{b_m}{a_{m-1} + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{b_{h+1}}{a_h + \cfrac{b_h}{a_{h-1}}}}}$$

$c_{h-1} = a_{h-1} c_h + b_h c_{h+1}$ also auch $c_{h-1} = a_{h-1} C_h + b_h C_{h+1}$, da nach der Voraussetzung $c_h = C_h$, $c_{h+1} = C_{h+1}$ seyn soll; aus dem Vergleich mit Formel 5) folgt hieraus unmittelbar $c_{h-1} = C_{h-1}$. Da nun wirklich die Zähler von $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}}$ und von $a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m}$ gleich sind, d. h. $c_{m-1} = C_{m-1}$, so ist mithin allgemein $c_k = C_k$ also auch $c_0 = C_0$.

### 141.

Sowohl die Formeln 2) und 3) des §. 139 als die Formel 5) des vorhergehenden §. geben ein einfaches Verfahren, Zähler und Nenner des Kettenbruches 1) unmittelbar aus den Theilnennern $a_0, a_1, \ldots a_m$ und den Theilzählern $b_1, b_2 \ldots b_m$ zusammen zu setzen. Bedient man sich der Formel 2) so hat man zunächst

$$A_0 = a_0$$
$$A_1 = a_1 a_0 \\ + b_1$$

Um $A_2$ zu finden, setzt man den Gliedern, aus welchen $A_1$ besteht, $a_2$ vor, und $b_2$ vor $a_0$, und findet

$$A_2 = a_2 a_1 a_0 + a_2 b_1 + b_2 a_0$$

Nun setzt man wieder $a_3$ den Gliedern von $A_2$, und $b_3$ den Gliedern von $A_1$ vor, und findet

$$A_3 = a_3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 a_0 + b_3 a_1 a_0 + b_3 b_1$$

Indem man auf diese Weise fortgeht, findet man zuletzt $A_m$. Ebenso findet man $B_m$ vermittelst der Formel 3) indem man von $B_0 = 1$, $B_1 = a_1$ ausgeht.

Will man die Formel 5) des §. 140 benutzen, so beginnt man mit $C_m = a_m$, $C_{m-1} = a_{m-1} a_m + b_m$, daraus findet man

$$C_{m-2} = a_{m-2} a_{m-1} a_m + a_{m-2} b_m + b_{m-1} a_m$$

u. s. w. bis man an $C_1 = B_m$ und $C_0 = A_m$ kommt.

Man kann aber auch jedes $A_k$ finden, ohne, wie es bei dem eben beschriebenen Verfahren nöthig ist, die vorhergehenden $A_0, A_1 \ldots A_{k-1}$ zu berechnen, vielmehr findet man bei diesem neuen Verfahren, welches ebendeswegen ein independentes ist, unmittelbar alle einzelnen Glieder, aus welchen $A_k$ besteht. Man schreibe zunächst das Produkt $a_0 a_1 a_2 \ldots a_k$, hierin setze man $a_0 a_1 = b_1$ und addire den hierdurch entstehenden Ausdruck zu dem Produkte hinzu, so dass man nun $a_0 a_1 a_2 \ldots a_k + b_1 a_2 \ldots a_k$ hat. In dieser Summe setze man wieder statt $a_1 a_2$ den Werth $b_2$ und addire den hierdurch entstehenden Ausdruck zu den bereits gebildeten, so erhält man $a_0 a_1 a_2 \ldots a_k + b_1 a_2 \ldots a_k + a_0 b_2 a_3 \ldots a_k$. Hierin setze man nun wieder, wo es angeht, statt $a_2 a_3$ den Werth $b_3$ und addire die hierdurch entstehenden Ausdrücke zu den bereits gebildeten, auf diese Weise fährt man fort indem man zuletzt in den bereits gebildeten Ausdrücken statt

$a_{k-1} a_k$ den Werth $b_k$ setzt, und die hierdurch entstehenden Ausdrücke zu den bereits gebildeten addirt. Man bezeichne die Summe aller dieser Ausdrücke durch $[a_0 a_1 \ldots a_k]$ so wird $[a_0 a_1 \ldots a_k] = A_k$ seyn. Um z. B. $[a_0 a_1 a_2 a_3]$ zu bilden, geht man von $a_0 a_1 a_2 a_3$ aus; indem man $a_0 a_1 = b_1$ setzt, erhält man

$$a_0 a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 a_3$$

hierin setzt man wieder $a_1 a_2 = b_2$ und erhält

$$a_0 a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_0 b_2 a_3$$

hierin setzt man schliesslich $a_2 a_3 = b_3$ und erhält

$$a_0 a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_0 b_2 a_3 + a_0 a_1 b_3 + b_1 b_3$$

derselbe Werth, welcher oben für $A_3$ gefunden wurde.

Der Ausdruck $[a_0 a_1 \ldots a_k]$ lässt sich offenbar in zwei Gliedergruppen zerlegen, so dass alle zu der ersten Gruppe gehörenden den Faktor $a_k$ und nicht den Faktor $b_k$ enthalten, die zur zweiten Gruppe gehörenden dagegen den Faktor $b_k$ und nicht den Faktor $a_k$. Die erste Gruppe ist aber nichts Anderes als $a_k [a_0 a_1 \ldots a_{k-1}]$, da in dieser Gruppe mit allen anderen Elementen als $a_k$ die vorgeschriebenen Veränderungen vorgenommen worden sind; aus demselben Grunde ist die zweite Gruppe, in welcher $b_k$ an die Stelle von $a_{k-1} a_k$ getreten ist, nichts Anderes als $b_k [a_0 a_1 \ldots a_{k-2}]$. Mithin ist

$$[a_0 a_1 \ldots a_k] = a_k [a_0 a_1 \ldots a_{k-1}] + b_k [a_0 a_1 \ldots a_{k-2}]$$

dies ist dasselbe Bildungsgesetz nach welchem $A_k$ aus $A_{k-1}$ und $A_{k-2}$ gefunden wird. Nun ist aber, wie man unmittelbar findet, $[a_0 a_1] = A_1$ und $[a_0 a_1 a_2] = A_2$ also auch $A_3 = [a_0 a_1 a_2 a_3]$ und allgemein $A_k = [a_0 a_1 \ldots a_k]$.

Man sieht ohne Weiteres, dass man in derselben Weise jedes $B_k$ findet, wenn man von dem Produkte $a_1 a_2 \ldots a_k$ ausgeht und dies ebenso behandelt wie vorher das Produkt $a_0 a_1 \ldots a_k$ behandelt wurde, indem man allmälich $b_2$ statt $a_1 a_2$, dann $b_3$ statt $a_2 a_3$ u. s. w. setzt.

## 142.

Die Differenz zweier auf einander folgender Näherungs-

brüche $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k}$ hat den Zähler $A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1}$, man bezeichne diesen Ausdruck durch $Z_{k+1}$. Substituirt man aber statt $A_{k+1}$ seinen Werth $a_{k+1} A_k + b_{k+1} A_{k-1}$ und statt $B_{k+1}$ seinen Werth $a_{k+1} B_k + b_{k+1} B_{k-1}$ so findet man

$$Z_{k+1} = - b_{k+1} (A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k) = - b_{k+1} Z_k$$

also auch $Z_k = - b_k Z_{k-1}$ und $Z_{k+1} = (-1)^2 b_{k+1} b_k Z_{k-1}$ und indem man diese Betrachtung fortsetzt, ergiebt sich mithin

$$Z_{k+1} = (-1)^k b_{k+1} b_k \ldots b_2 Z_1$$

nun ist $Z_1$ der Zähler der Differenz $\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} - \frac{a_0}{1}$, also $Z_1 = b_1$, folglich

$$Z_{k+1} = (-1)^k b_{k+1} b_k \ldots\ldots b_1$$

und

$$7) \qquad \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^k b_1 b_2 \ldots b_{k+1}}{B_k B_{k+1}}$$

Setzt man

$$a_{k+1} + \cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2} + \cfrac{\vdots}{\quad + \cfrac{b_m}{a_m}}} = \frac{p}{q}$$

so geht $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ in $\frac{A_m}{B_m}$ über, wenn man $\frac{p}{q}$ statt $a_{k+1}$ setzt, man hat mithin

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{\frac{p}{q} A_k + b_{k+1} A_{k-1}}{\frac{p}{q} B_k + b_{k+1} B_{k-1}} = \frac{pA_k + b_{k+1} q A_{k-1}}{pB_k + b_{k+1} q B_{k-1}}$$

und

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_k}{B_k} = -\frac{b_{k+1}\, q(A_k B_{k-1} - B_k A_{k-1})}{B_k B_m} = \frac{q Z_{k+1}}{B_k B_m}$$

oder

$$8)\quad \frac{A_m}{B_m} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^k q \,.\, b_1 b_2 \ldots b_{k+1}}{B_k B_m}$$

143.

Seyen nun sämmtliche Theilzähler und Theilnenner des Kettenbruches 1) positiv, mithin auch die Ausdrücke $B_1$, $B_2 \ldots B_m$. Nach Formel 7) und 8) wird also, sobald $m > k$, die Differenz $\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_k}{B_k}$ positiv oder negativ seyn, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist. Nennt man einen Näherungsbruch $\frac{A_k}{B_k}$ einen geraden oder ungeraden, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist, so folgt hieraus, dass jeder gerade Näherungsbruch kleiner und jeder ungerade Näherungsbruch grösser ist, als alle folgenden Näherungsbrüche. Die geraden Näherungsbrüche $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_4}{B_4} \ldots$ bilden also eine wachsende Zahlenreihe, die ungeraden Näherungsbrüche $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_3}{B_3}, \frac{A_5}{B_5} \ldots$ dagegen eine abnehmende. Da ferner die zwei Differenzen $\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_k}{B_k}$ entgegengesetzte Zeichen haben, so folgt, dass jeder spätere Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$ zwischen den zwei aufeinanderfolgenden $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ enthalten ist. Setzt man $k = 1$, so ergiebt sich hieraus, dass zwischen den Grenzen $\frac{A_0}{B_0}$ und $\frac{A_1}{B_1}$, d. h.

zwischen den zwei ersten Näherungsbrüchen, die Werthe aller folgenden Näherungsbrüche $\frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3} \ldots$ enthalten sind.

Lässt man den Kettenbruch 1) in einen unendlichen übergehen, indem man $m$ unbegrenzt wachsen lässt, während man noch immer die Voraussetzung beibehält, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner positiv sind, so müssen sich, sowohl die geraden als die ungeraden Näherungsbrüche, indem sie immer zwischen $\frac{A_0}{B_0}$ und $\frac{A_1}{B_1}$ eingeschlossen bleiben, einem endlichen Werthe unbegrenzt nähern. Es sind hier mithin zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nähern sich die geraden Näherungsbrüche, indem sie fortwährend wachsen, und die ungeraden, indem sie fortwährend abnehmen, einem und demselben Werthe, dann convergirt der Kettenbruch und die Grenze seiner Näherungsbrüche ist sein Werth. Oder die geraden Näherungsbrüche haben eine andere Grenze als die ungeraden, dann oscillirt der Kettenbruch; man kann alsdann, ähnlich wie bei den oscillirenden Reihen (§. 43), sagen, dass der Kettenbruch zwei Werthe, nemlich die zwei Grenzen seiner Näherungsbrüche hat.

Im ersten Falle sind die Näherungsbrüche wirkliche Näherungswerthe, indem jeder gerade Näherungsbruch kleiner, jeder ungerade grösser als der wahre Werth ist, so dass dieser zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen enthalten ist.

## 144.

Es entsteht nun die Frage, wie man aus der Beschaffenheit des Kettenbruches Kennzeichen ableiten kann, aus welchen sich entscheiden lässt, ob er convergirt oder oscillirt. Es liegt der Gedanke nahe, hier in ähnlicher Weise zu verfahren, wie bei den unendlichen Produkten. Kann man nemlich unter der Voraussetzung, dass $m$ eine endliche Zahl ist, den Kettenbruch 1) in eine Reihe verwandeln, welche denselben Werth hat, so wird, wenn man $m$ unbegrenzt wachsen lässt, die Reihe dieselbe Grenze oder dieselben Grenzen ha-

ben, wie der Kettenbruch. Da wir nun schon Kennzeichen gefunden haben, welche über die Beschaffenheit der Reihen entscheiden, so werden wir die Beschaffenheit des Kettenbruches aus der Beschaffenheit der gleichgeltenden Reihe kennen lernen. Da wir indessen später auch die Beschaffenheit derjenigen Kettenbrüche untersuchen müssen, deren Theilzähler und Theilnenner nicht sämmtlich positiv sind, so wollen wir uns gleich die allgemeine Frage stellen, wie man den Kettenbruch 1), welches Zeichen die Theilzähler und Theilnenner haben mögen, wenn $m$ eine endliche Zahl ist, in eine gleichgeltende Reihe verwandeln kann.

Die Gleichung

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) \ldots + \left(\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right)$$

ist offenbar eine identische. Berücksichtigt man aber die Formel 7) des §. 142 und bedenkt zugleich dass $A_0 = a_0$, $B_0 = 1$, so hat man

$$9)\quad \frac{A_m}{B_m} = a_0 + \frac{b_1}{B_1} - \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{B_2 B_3} \ldots + (-1)^{m-1} \frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{B_{m-1} B_m}$$

wodurch mithin der Kettenbruch 1) in eine Reihe verwandelt ist. Es ist hierbei noch zu beachten, dass nicht blos der ganze Kettenbruch 1) der Reihe 9) gleich ist, sondern auch dasselbe Verhältniss zwischen jedem Näherungsbruche und einer entsprechenden Anzahl der ersten Glieder der Reihe statt findet. Denn es ist

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) = a_0 + \frac{b_1}{B_1}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) = a_0 + \frac{b_1}{B_1} - \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2}$$

u. s. w.

Lässt man $m$ unbegrenzt wachsen, so ist

$$\lim \frac{A_m}{B_m} = \lim \left(a_0 + \frac{b_1}{B_1} - \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2} \ldots + (-1)^{m-1} \frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{B_{m-1} B_m}\right)$$

und es käme nun darauf an zu untersuchen, ob die Reihe

convergirt. Zwei aufeinanderfolgende Glieder dieser Reihe haben die Form

$$(-1)^{k-1}\frac{b_1 \,.\, b_2 \ldots b_k}{B_{k-1}\,B_k}, \quad \frac{(-1)^k b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{k+1}}{B_k\,B_{k+1}}$$

ihr Quotient ist, abgesehen vom Zeichen, $\frac{b_{k+1}\,B_{k-1}}{B_{k+1}}$. Je nachdem also dieser Quotient um ein Angebbares kleiner oder grösser als die Einheit wäre, würde die Reihe (und mithin auch der Kettenbruch) convergiren oder divergiren; hätte aber dieser Quotient die Einheit selbst zur Grenze, so würden die Betrachtungen des §. 58 ff. anzuwenden seyn. Allein die Werthe von $B_{k-1}$ und $B_{k+1}$ erscheinen, bei fortwährend wachsendem $k$, in so verwickelter Form, dass sich die Beschaffenheit des Quotienten nicht leicht angeben lässt, und es werden daher weitere Erörterungen nöthig seyn, um über die Beschaffenheit der Reihe Aufschluss zu erlangen.

Zunächst ist zu bemerken, dass man dem Kettenbruche 1) und daher auch der gleichgeltenden Reihe eine einfachere Gestalt geben kann, welche deren weitere Untersuchung erleichtern wird. Diese Umformung beruht auf dem Satze, dass man an der Beschaffenheit eines Kettenbruches Nichts ändert, wenn man irgend einen Theilzähler $b_k$, den dazu gehörenden Theilnenner $a_k$ und den darauf folgenden Theilzähler $b_{k+1}$ mit derselben Zahl multiplicirt (oder dividirt). Da nemlich $\frac{b_k}{a_k + b_{k+1}} = \frac{pb_k}{pa_k + pb_{k+1}}$ ist, so wird es auch, wenn man $W$ statt $a_{k+1} + \cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2} + \ddots}$ setzt, was auch $W$ bedeute, einerlei seyn, ob man $\cfrac{b_k}{a_k + \cfrac{b_{k+1}}{W}}$ oder $\cfrac{pb_k}{pa_k + \cfrac{pb_{k+1}}{W}}$ schreibt. Man

wird daher auch statt
$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{b_k}{a_k + \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} + \ldots}}}}$$

schreiben dürfen
$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{\vdots}{+\cfrac{pb_k}{pa_k + \cfrac{pb_{k+1}}{a_{k+1} + \ldots}}}}$$

Hieraus folgt weiter, dass man den Kettenbruch 1) immer in einen anderen verwandeln kann, dessen Theilzähler sämmtlich der Einheit gleich sind. Wenn man nemlich statt des Theilzählers $b_1$ die Einheit als Theilzähler erhalten will, so multiplicire man die drei Ausdrücke $b_1$, $a_1$, $b_2$, mit $\frac{1}{b_1}$ so erhält man

$$a_0 + \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \cfrac{b_2 \cdot \frac{1}{b_1}}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

Um nun wieder die Einheit statt des Zählers $\frac{b_2}{b_1}$ zu erhalten, multiplicire man $\frac{b_2}{b_1}$, $a_2$, $b_3$, mit $\frac{b_1}{b_2}$ so erhält man

$$a_0 + \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \cfrac{1}{a_2 \frac{b_1}{b_2} + \cfrac{b_1 b_3 : b_2}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}}}$$

Alsdann erhält man wieder die Einheit statt $\frac{b_1 b_3}{b_2}$ indem man $\frac{b_1 b_3}{b_2}$, $a_3$, $b_4$, mit $\frac{b_2}{b_1 b_3}$ multiplicirt, dies giebt

$$a_0+\cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1}+\cfrac{1}{\frac{a_2b_1}{b_2}+\cfrac{1}{\frac{a_3b_2}{b_1b_3}+\cfrac{b_4b_2:b_1b_3}{a_4+\cfrac{b_5}{a_5+\ddots}}}}}$$

Man sieht wie man, durch Fortsetzung dieses Verfahrens, den Kettenbruch 1) in einen gleichgeltenden verwandeln kann, dessen Theilzähler sämmtlich der Einheit gleich sind. Man setze

$$a_0=h_0,\ \frac{a_1}{b_1}=h_1,\ \frac{a_2b_1}{b_2}=h_2,\ \frac{a_3b_2}{b_1b_3}=h_3,\ \frac{a_4b_1b_3}{b_2b_4}=h_4$$

so sind dies die ersten Theilnenner des neuen Kettenbruches. Man findet aber allgemein

$$10)\quad h_{2m+1}=\frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}}\cdot\frac{b_{2m}}{b_{2m-1}}\cdots\frac{b_2}{b_1};\ h_{2m}=a_{2m}\frac{b_{2m-1}\ldots b_1}{b_{2m}\ldots b_2}$$

Ist nemlich bis zu einem gewissen $m$ wirklich $h_{2m}=a_{2m}\cdot\frac{b_{2m-1}\ldots b_1}{b_{2m}\ldots b_2}$ so wird man mithin als Fortsetzung

$$h_{2m}+\frac{b_{2m-1}\ldots b_1}{b_{2m}\ldots b_2}\cdot\cfrac{b_{2m+1}}{a_{2m+1}+\cfrac{b_{2m+2}}{a_{2m+2}+\ddots}}=h_{2m}+\cfrac{1}{\frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}}\cdot\frac{b_{2m}\ldots b_2}{b_{2m-1}\ldots b_1}+\ddots}$$

haben, es hat also wirklich $h_{2m+1}$ die angegebene Form, und ebenso findet man hieraus wieder die Form von $h_{2m+2}$. Da nun $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, wie wir durch die unmittelbare Rechnung gefunden haben, wirklich in der angegebenen Form 10) enthalten sind, so ist diese Form allgemein richtig. Der Kettenbruch 1) ist also in den gleichgeltenden Kettenbruch

$$11)\qquad h_0+\cfrac{1}{h_1+\cfrac{1}{h_2+\ddots}}$$

verwandelt. Bezeichnet man durch $H_k$ den Zähler, durch $L_k$ den Nenner des Näherungsbruches

$$h_0 + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{h_k}}}$$

so ist nun nach Formel 7)

$$12) \quad \frac{H_{k+1}}{L_{k+1}} - \frac{H_k}{L_k} = \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}}$$

und nach Form. 2) und 3)

$$13) \quad H_k = h_k \cdot H_{k-1} + H_{k-2}$$

$$14) \quad L_k = h_k \cdot L_{k-1} + L_{k-2}$$

Ferner ist

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{H_m}{L_m} = h_0 + (\frac{H_1}{L_1} - h_0) + (\frac{H_2}{L_2} - \frac{H_1}{L_1} \ldots + \left(\frac{H_m}{L_m} - \frac{H_{m-1}}{L_{m-1}}\right)$$

oder

$$15) \quad \frac{A_m}{B_m} = h_0 + \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_1 L_2} \ldots + (-1)^m \cdot \frac{1}{L_{m-1} L_m}$$

145.

Gehen wir jetzt wieder auf die Voraussetzung zurück, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner des Kettenbruches 1) positiv sind, so werden mithin die Ausdrücke $h_1$, $h_2$... ebenfalls positiv seyn, also auch die Ausdrücke $L_1$, $L_2$.... Durch Formel 15) ist demnach der Kettenbruch in eine Reihe verwandelt, bei welcher die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Lässt man nun $m$ unbegrenzt wachsen, so wird die unendliche Reihe und mithin auch der unendliche Kettenbruch 1) immer und nur dann convergiren, wenn die einzelnen Glieder der Reihe unbegrenzt abnehmen (§. 59), also die Ausdrücke $L_1 L_2$, $L_2 L_3$ u. s. w. unbegrenzt wachsen.

Jeder Ausdruck $L_k$ wird aber, wenn $k$ ungerade ist, ein Glied welches $= h_1 + h_3 + \ldots + h_k$, dagegen, wenn $k$ gerade ist, ein Glied, welches der Einheit gleich ist, enthalten. Zunächst sieht man, dass dieses Gesetz allgemein richtig seyn muss, wenn es bis zu einem gewissen Werthe von $k$

richtig ist. Man nehme nemlich an, dass für ein bestimmtes $k$, welches eine gerade Zahl seyn soll, der Voraussetzung gemäss

$$L_{k-1} = S + h_1 + h_3 \ldots + h_{k-1};\ L_k = T + 1$$

gesetzt werden kann, so ist nach Formel 14)

$$L_{k+1} = h_{k+1} L_k + L_{k-1} = h_{k+1}(T+1) + S + h_1 + h_3 \ldots + h_{k-1}$$

also, wenn man $h_{k+1} T + S = S_1$ setzt,

$$L_{k+1} = S_1 + h_1 + h_3 \ldots + h_{k+1}$$

ferner ist

$$L_{k+2} = h_{k+2} L_{k+1} + L_k = h_{k+2} L_{k+1} + T + 1$$

also wenn man $h_{k+2} L_{k+1} + T = T_1$ setzt,

$$L_{k+2} = T_1 + 1$$

Da nun aber wirklich für $k = 2$

$$L_{k-1} = L_1 = h_1;\ L_k = L_2 = h_1 h_2 + 1$$

ist, so ist damit die allgemeine Gültigkeit unserer Behauptung bewiesen*). Und da $h_0$, $h_1$ . . . positive Grössen sind, so sind auch die Grössen $S$, $T$, $S_1$, $T_1$, positiv. Das Produkt $L_{m-1} L_m$ ist mithin, wenn $m$ gerade ist, aus zwei Faktoren zusammen gesetzt, von welchen der eine $L_m$ in der Form $M + 1$, der andere $L_{m-1}$ in der Form $N + h_1 + h_3 \ldots + h_{m-1}$ dargestellt werden kann, wo $M$ und $N$ positiv sind. Ist dagegen $m$ ungerade, so kann $L_{m-1}$ in der Form $M + 1$ und $L_m$ in der Form $N + h_1 + h_3 \ldots + h_m$ dargestellt werden. Bezeichnen also $P$ und $Q$ zwei positive Zahlen, so wird man das Produkt $L_{m-1} L_m$ durch $P + h_1 + h_3 \ldots + h_{m-1}$ oder durch $Q + h_1 + h_3 + \ldots + h_m$ darstellen können, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist. Jedenfalls wird daher, wenn $m$ unbegrenzt wächst, das Produkt $L_{m-1} L_m$, neben einer anderen positiven Grösse, noch die nur aus positiven Grössen bestehende unendliche Reihe

16) $$h_1 + h_3 + h_5 + \ldots$$

---

*) Dasselbe ist auch leicht aus §. 141 abzuleiten.

enthalten. Ist also diese Reihe divergent, so wächst $L_{m-1}L_m$ über jede angebbare Grösse, oder es sinkt das allgemeine Glied $\frac{1}{L_{m-1}L_m}$ der Reihe 15) unter jede angebbare Grösse, dann ist diese Reihe und mithin auch der Kettenbruch 1) convergent.

Schreibt man nun statt der Grössen $h_1$, $h_3$ . . . wieder ihre Werthe nach Formel 10) so hat man mithin den Satz:

Wenn alle Theilzähler und Theilnenner des Kettenbruches 1) positiv sind, so wird dieser Kettenbruch convergiren, wenn die Reihe

$$17)\qquad \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} + \frac{b_2\, b_4}{b_1\, b_3} \cdot \frac{a_5}{b_5} + \ldots.$$

divergirt.

Der Kettenbruch 11) convergirt offenbar, wenn der Kettenbruch

$$h_1 + \frac{1}{h_2 +}$$
$$\vdots$$

convergirt, man erhält aber den letzteren aus 11) wenn man $h_1$ statt $h_0$, $h_2$ statt $h_1$ u. s. w. setzt. Die Reihe 16) geht in $h_2 + h_4 + h_6 + \ldots$ über.

Hieraus folgt also, indem man die obigen Schlüsse wiederholt, dass der Kettenbruch 1) convergirt, wenn die Reihe

$$18)\qquad h_2 + h_4 + h_6 + \ldots$$

divergirt, und indem man wieder statt $h_2$, $h_4$, $h_6$ . . . ihre Werthe setzt, ergiebt sich der Satz:

Der Kettenbruch 1), dessen Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positiv sind, convergirt, sobald die Reihe

$$19)\qquad a_2 \cdot \frac{b_1}{b_2} + a_4 \cdot \frac{b_1\, b_3}{b_2\, b_4} + a_6 \cdot \frac{b_1\, b_3\, b_5}{b_2\, b_4\, b_6} + \ldots$$

divergirt.

Der Quotient zweier auf einander folgender Glieder in den Reihen 17) und 19) wird im Allgemeinen so einfach seyn, dass man leicht im Stande seyn wird zu entscheiden, ob diese Reihen divergiren.

Soll z. B. die Beschaffenheit des Kettenbruches

$$1 + \cfrac{1\,.\,3}{1 + \cfrac{3\,.\,5}{1 + \cfrac{5\,.\,7}{1 + \ddots}}}$$

untersucht werden, so ist hier $a_0 = a_1 = a_2 \ldots = 1$, $b_1 = 1\,.\,3$, $b_2 = 3\,.\,5\ldots$ allgemein $b_m = (2m - 1)\,(2m + 1)$ und die Reihe 17) wird

$$\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{3\,.\,5}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7} + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}\ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots$$

Die letztere Reihe ist ein specieller Fall der Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + 2b} + \ldots$$

aus welcher sie entsteht, wenn man $a = 3$, $b = 4$ setzt; sie divergirt also (§. 46) und mithin convergirt der Kettenbruch. Dasselbe folgt aus der Reihe 19) welche in diesem Falle in

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$$

übergeht, und mithin ebenfalls divergirt.

Wäre der Kettenbruch

$$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{6}{1 + \cfrac{5}{1 + \ddots}}}}}}$$

zu untersuchen, wo die ungeraden Theilzähler die Reihe der geraden Zahlen 2, 4, 6 ..., die geraden Theilzähler die Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... bilden, so würde die Reihe 17) in

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} + \ldots$$

übergehen. Diese Reihe convergirt aber (§. 62) und entscheidet daher nicht mehr über die Beschaffenheit des Kettenbruches. Die Reihe 19) dagegen wird

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots$$

welche divergirt, da jedes Glied grösser als die Einheit ist, mithin convergirt der Kettenbruch.

146.

Bei dem letzten Beispiele war von den Reihen 17) und 19) die eine convergent, die andere divergent. Wenn aber beide Reihen convergiren, so muss der Kettenbruch 1), wie jetzt bewiesen werden soll, oscilliren. Der Kettenbruch wird nemlich nicht convergiren und mithin, wie oben (§. 143) gezeigt wurde, oscilliren, sobald die Reihe 15) nicht convergirt. Soll dies der Fall seyn, so dürfen also die Glieder dieser Reihe nicht unbegrenzt abnehmen, d. h. der Nenner $L_{m-1} L_m$ muss, bei unbegrenzt wachsendem $m$, immer einen endlichen Werth behalten. Da nun jeder der Ausdrücke $L_{m-1}$ und $L_m$ grösser als $h_1$ ist, d. h. grösser als ein bestimmter positiver Werth, folglich nicht Null werden kann, so muss jeder dieser Ausdrücke einen endlichen Werth haben, wenn ihr Produkt endlich seyn soll. Es sind also die Bedingungen zu finden, unter welchen ein Ausdruck $L_m$, bei unbegrenzt wachsendem $m$, endlich bleibt. Nun ist aber leicht zu sehen, dass die einzelnen Glieder, aus welchen $L_m$ besteht, sämmtlich unter den Formen vorkommen müssen, aus welchen die Combinationen ohne Wiederholung aus den $m$ Elementen $h_1$, $h_2 \ldots h_m$ bestehen, wenn die in den einzelnen Formen befindlichen Elemente als Faktoren angesehen werden und die einzelnen Formen addirt werden sollen; so jedoch dass, wenn $m$ eine gerade Zahl ist, in $L_m$ ausser diesen Combinationsformen auch noch die Einheit vorkommt.

Wendet man nemlich das in §. 141 gezeigte Verfahren zur independenten Bestimmung auf den gegenwärtigen Fall an, so hat man, da hier die Theilzähler des Kettenbruches 11) sämmtlich der Einheit gleich sind, um $L_m$ zu bilden, zuerst $h_1 h_2 \ldots h_m$ zu nehmen, d. h. die $m$te Combinationsclasse ohne Wiederholung aus den Elementen $h_1$, $h_2 \ldots h_m$. Alsdann hat man statt $h_1 h_2$, $h_2 h_3$ u. s. w. die Einheit zu setzen, d. h. man

hat diese Produkte aus $h_1 h_2 \ldots h_m$ wegzulassen, wodurch man einen Theil der Formen der $m$—2ten Combinationsclasse ohne Wiederholung erhält u. s. w. Ist $m$ gerade, so hat man noch schliesslich statt $h_1 h_2 \ldots h_m$ den Werth 1 zu setzen. Bezeichnet man die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen $h_1, h_2 \ldots h_m$ durch $C'$ $(h_1, h_2 \ldots h_m)$ so hat man demnach

20) $$L_m < C'(h_1, h_2 \ldots h_m) + 1$$

oder

21) $$L_m < C'(h_1, h_2 \ldots h_m)$$

je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, also jedenfalls

22) $$L_m < C'(h_1, h_2, \ldots h_m) + 1$$

## 147.

Man kann aber $C'$ $(h_1, h_2 \ldots h_m)$ durch eine analytische Formel ausdrücken, wie zunächst gezeigt werden soll. Denn nach §. 76 Form. 44) ist

$$(1 + a_0)(1 + b_0) \ldots\ldots = 1 + \overset{1}{C'} + \overset{2}{C'} \ldots + \overset{m-r}{C'} \ldots + \overset{m}{C'}$$

nun ist $\overset{1}{C'} + \overset{2}{C'} \ldots + \overset{m}{C'}$ die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen $a_0, b_0, \ldots,$ also nach der im vorhergehenden §. gebrauchten Bezeichnung durch $C'(a_0, b_0, \ldots)$ auszudrücken, mithin

23) $$(1 + a_0)(1 + b_0) \ldots = 1 + C'(a_0, b_0, \ldots)$$

oder, wenn man $a_0 = h_1$, $b_0 = h_2 \ldots$ setzt,

24) $$(1 + h_1)(1 + h_2) \ldots (1 + h_m) = 1 + C'(h_1, h_2 \ldots h_m)$$

welches die gesuchte analytische Formel ist.

## 148.

Nach Form. 22) ist mithin

$$L_m < (1 + h_1)(1 + h_2) \ldots\ldots (1 + h_m)$$

Dieser Ausdruck gilt für jedes $m$. Lässt man nun $m$ unbegrenzt wachsen, so wird, da die Grössen $h_1, h_2 \ldots$ sämmtlich positiv sind, das unendliche Produkt

$$(1 + h_1)(1 + h_2) \ldots\ldots$$

convergiren, sobald die Reihe

25) $$h_1 + h_2 + \ldots\ldots$$

convergirt (§. 134), dann wird $L_m$ einen endlichen Werth haben und mithin der Kettenbruch 1) oscilliren (§. 146). Die Reihe 25) ist aber aus den zwei Reihen 16) und 18) zusammengesetzt, sie wird also immer und nur dann convergiren, wenn jede einzelne der Reihen 16) und 18) convergirt. Fasst man dies mit den zwei in §. 145 gefundenen Sätzen zusammen, so erhält man den allgemeinen Satz:

Wenn sämmtliche Theilzähler und Theilnenner des Kettenbruchs 1) positiv sind, so wird dieser Kettenbruch convergiren oder oscilliren je nachdem (wenigstens) eine oder keine der zwei Reihen 16) und 18) (oder, was dasselbe sagt, der Reihen 17) und 19)) divergirt*).

Soll z. B. die Beschaffenheit des Kettenbruches

$$26)\qquad 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^3}{1+\cfrac{2^4}{1+\ddots}}}}$$

untersucht werden, so ist hier $a_0 = a_1 = a_2 \ldots = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2^2 \ldots$ allgemein $b_m = 2^m$. Demnach geht jede der beiden Reihen 17) und 19) in

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

über, und da diese Reihe convergirt, so muss der Kettenbruch oscilliren. Berechnet man die Näherungsbrüche, so findet man für die ersten ungeraden Näherungsbrüche (bis auf die dritte Decimalstelle)

1; 1, 4; 1, 537; 1, 592; 1, 616; 1, 627; 1, 633;

und für die ersten geraden Näherungsbrüche

3; 2, 384; 2, 229; 2, 172; 2, 147; 2, 135; 2, 130

so dass wirklich die ungeraden Näherungswerthe gegen eine andere Grenze convergiren, als die geraden.

Dieser Kettenbruch ist ein specieller Fall des allgemeineren

*) Man kann daher auch sagen: der Kettenbruch convergirt oder oscillirt, je nachdem das Produkt $(1+h_1)(1+h_2)\ldots$ divergirt oder convergirt.

$$a + \cfrac{x}{a + \cfrac{x^2}{a + \cfrac{x^3}{a + \ddots}}}$$

für welchen die Reihen 17) und 19) in

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \dots\dots$$

übergehen, welche Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $x$ grösser oder nicht grösser als die Einheit ist; unter denselben Verhältnissen wird also auch der Kettenbruch oscilliren oder convergiren.

149.

Wenn ein Kettenbruch, dessen Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positiv sind, convergirt, und es ist jeder Theilnenner $\overline{\overline{>}}\ 1$, zugleich aber grösser als der darüber stehende Theilzähler oder ihm gleich, so ist jeder folgende Näherungsbruch dem Werthe des Kettenbruches näher als der vorhergehende. Wenn nemlich der ganze Kettenbruch 1) convergirt, so muss auch nothwendig der Theil

$$\cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2} + \ddots}$$

convergiren, denn hätte dieser zwei verschiedene Werthe, so müsste dies auch bei dem ganzen Kettenbruche der Fall seyn. Man setze daher

$$R = \cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2} + \ddots}$$

Ist der Werth des ganzen Kettenbruches $W$ so hat man mithin

$$W = a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{\vdots}{\vdots + \cfrac{b_k}{a_k + \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} + R}}}}$$

Nach Formel 2) und 3) ist also

$$W = \frac{(a_{k+1} + R)\, A_k + b_{k+1}\, A_{k-1}}{(a_{k+1} + R)\, B_k + b_{k+1}\, B_{k-1}} = \frac{A_{k+1} + RA_k}{B_{k+1} + RB_k}$$

und zugleich

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \frac{a_{k+1} A_k + b_{k+1} A_{k-1}}{a_{k+1} B_k + b_{k+1} B_{k-1}}$$

Demnach

$$W - \frac{A_k}{B_k} = \frac{A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1}}{B_k (B_{k+1} + RB_k)}$$

$$W - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = - \frac{(A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1})\, R}{B_{k+1} (B_{k+1} + RB_k)}$$

Nun ist

$$B_{k+1} = a_{k+1} B_k + b_{k+1} B_{k-1}$$

Nach unserer Voraussetzung ist aber $a_{k-1}$ mindestens der Einheit gleich, also jedenfalls $B_{k+1} > B_k$. Mithin ist der Nenner des Ausdruckes $W - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ grösser als der Nenner von $W - \frac{A_k}{B_k}$. Ferner ist nach unserer Voraussetzung $\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \overline{\overline{<}} 1$, also jedenfalls $R < 1$. Abgesehen vom Zeichen ist mithin der Zähler von $W - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ kleiner, als der Zähler von $W - \frac{A_k}{B_k}$, folglich, abgesehen vom Zeichen

$$W - \frac{A_k}{B_k} > W - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$$

d. h. jeder folgende Näherungsbruch ist dem Werthe des Kettenbruches näher als der vorhergehende, während dieser Werth zwischen den beiden Näherungsbrüchen liegt (§. 143).

150.

Wenn in dem Kettenbruche 1) die Theilzähler $b_1$, $b_2$ u.s.w. sämmtlich der **Einheit** gleich sind, während die Theilnenner **ganze positive** Zahlen sind, so geht dieser Kettenbruch in

27) $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

über und es ist vermöge der Formeln 2) und 3)

28) $$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2}$$

29) $$B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

Ist der Kettenbruch 27) ein unendlicher, so convergirt er, da die Reihe 17) in

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$$

also in eine divergirende Reihe übergeht. Diese Gattung Kettenbrüche nennt man **einfache**, sie verdienen, wegen der wichtigen Anwendungen, welche sie zulassen, eine besondere Aufmerksamkeit.

Offenbar ist der Kettenbruch 27) ein besonderer Fall der im vorhergehenden §. betrachteten Kettenbrüche, da hier die Theilnenner jedenfalls der Einheit gleich oder grösser als diese sind. Es ist also auch jeder Näherungsbruch dem Werthe des Kettenbruches näher als der vorhergehende, und dieser Werth liegt zwischen je zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen. Es hat aber dieser Fall das Besondere, dass hier Zähler und Nenner eines Näherungsbruches keinen gemeinschaftlichen Faktor haben können. Denn sind $\frac{A_k}{B_k}$ und $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche, so ist hier, nach Form. 7)

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^k}{B_k B_{k+1}}$$

also

30) $$A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1} = \pm 1$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist. Hätten $A_k$ und $B_k$ den ge-

meinschaftlichen Faktor $p$, so dass etwa $A_k = pf$ und $B_k = pg$ wäre, und mithin $f$ und $g$, wie $A_k$ und $B_k$, ganze Zahlen, so hätte man

$$gA_{k+1} - fB_{k+1} = \pm \frac{1}{p}$$

d. h. eine ganze Zahl müsste einem Bruche gleich seyn.

Aus Form. 30) folgt die merkwürdige Eigenschaft, dass kein Bruch, der nicht einen grösseren Nenner hat, als irgend ein Näherungsbruch, dem Werthe des einfachen Kettenbruches näher kommen kann als dieser Näherungsbruch. Wäre $\frac{s}{t}$ ein solcher Bruch, welcher dem Werthe des Kettenbruches näher wäre als $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ so müsste er jedenfalls, wie dieser Werth, zwischen $\frac{A_k}{B_k}$ und $\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$ liegen. Es müsste also (ohne Rücksicht auf das Zeichen)

$$\frac{s}{t} - \frac{A_k}{B_k} < \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k}$$

also (ohne Rücksicht auf das Zeichen)

$$\frac{sB_k - A_k t}{B_k t} < \frac{1}{B_k B_{k+1}}$$

oder

$$\frac{sB_k - A_k t}{t} < \frac{1}{B_{k+1}}$$

seyn, was nicht seyn kann, da der Voraussetzung nach $t$ nicht grösser als $B_{k+1}$ seyn soll, und $sB_k - A_k t$, als die Differenz ganzer Zahlen, mindestens (ohne Rücksicht auf das Zeichen) der Einheit gleich ist.

## 151.

Aus dieser Eigenschaft der einfachen Kettenbrüche ergiebt sich eine sehr wichtige Anwendung derselben. Es kommt nemlich in den Anwendungen der Mathematik sehr häufig vor,

dass gewisse Zahlenverhältnisse durch Brüche ausgedrückt werden, deren Nenner sehr gross ist und die ebendeswegen nicht bequem in den Rechnungen gebraucht werden können. Meistens genügt es aber, wenn man Näherungswerthe nimmt, welche aus Brüchen mit kleinerem Nenner bestehen, mit welchen daher leichter gerechnet werden kann. Dies ist namentlich der Fall, wenn jene Zahlenverhältnisse ursprünglich irrationale sind, die also überhaupt in rationalen Zahlen nur annähernd ausgedrückt werden können. Es entsteht aber dann die Frage, wie man sich solche Näherungswerthe verschaffen kann, welche, während ihr Nenner nicht über eine gewisse Grösse hinausgeht, dem wahren Werthe näher kommen, als jeder andere Bruch, welcher keinen grösseren Nenner hat. Diese Frage kann durch die so eben erläuterte Eigenschaft der einfachen Kettenbrüche gelöst werden.

Man kann jeden Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, durch ein Verfahren, welches man schon in der Arithmetik anwendet, um den grössten gemeinschaftlichen Faktor zweier Zahlen zu finden, in einen einfachen Kettenbruch verwandeln. Sey der Bruch $\frac{M}{N}$, wir setzen voraus dass $M$ und $N$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, sey nun $M = aN + N'$, so dass $a$ die grösste in $\frac{M}{N}$ enthaltene ganze Zahl*) und also $N' < N$ ist. Man hat demnach $\frac{M}{N} = a + \frac{N'}{N}$. Sey ferner $a_1$ die grösste in $\frac{N}{N'}$ enthaltene ganze Zahl und $N = a_1 N' + N_2$ also $\frac{N'}{N} = \cfrac{1}{a_1 + \frac{N_2}{N_1}}$ und $\frac{M}{N} = a + \cfrac{1}{a_1 + \frac{N_2}{N_1}}$.

Nun ist $N_2 < N'$; ist also $a_2$ die grösste in $\frac{N_1}{N_2}$ enthaltene ganze Zahl, so sey $N_1 = a_2 N_2 + N_3$ also $\frac{N_2}{N_1} = \cfrac{1}{a_2 + \frac{N_3}{N_2}}$

*) Ist $M < N$, so ist mithin $a = 0$.

und $\frac{M}{N} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{N_3}{N_2}}}$. Fährt man auf die angegebene

Weise fort, so erhält man eine Reihe ganzer Zahlen $N_1$, $N_2$, $N_3$ ... u. s. w. von welchen jede kleiner als die vorhergehende ist, man muss also zuletzt an eine Zahl $N_m$ kommen, welche der Einheit gleich ist. Dann hat man

$N_{m-2} = a_{m-1} N_{m-1} + N_m = a_{m-1} N_{m-1} + 1$ also

$\frac{N_{m-2}}{N_{m-1}} = a_{m-1} + \frac{1}{N_{m-1}}$ oder, wenn man $a_m$ statt $N_{m-1}$ setzt,

$$\frac{N_{m-2}}{N_{m-1}} = a_{m-1} + \frac{1}{a_m}$$

also
$$\frac{M}{N} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{a_m}}}}$$

wodurch der gewöhnliche Bruch in einen einfachen Kettenbruch verwandelt ist. Berechnet man nun die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches, so wird jeder Näherungsbruch $\frac{A_k}{B_k}$ dem Werthe $\frac{M}{N}$ näher seyn, als jeder andere Bruch, dessen Nenner nicht grösser als $B_k$ ist.

Wir haben z. B. früher (§. 81) die Zahl $e$ bis auf 10 Decimalstellen angegeben. Gesetzt man nähme statt dessen $e = 2{,}71$ indem man nur die zwei ersten Decimalstellen benutzt. Man wünscht aber Näherungswerthe der Zahl $e$ zu haben, welche Brüche mit kleinerem Nenner als 100 sind, sich jedoch dem Bruche $\frac{271}{100}$ mehr nähern als jeder andere Bruch, welcher keinen grösseren Nenner hat. Man verwandle, nach

dem oben angegebenen Verfahren, $\frac{271}{100}$, in einen einfachen Kettenbruch, so findet man

$$\frac{271}{100} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

die Näherungsbrüche sind

$$2,\ 3,\ \frac{8}{3},\ \frac{19}{7},\ \frac{84}{31},\ \frac{271}{100}$$

Der Bruch $\frac{19}{7}$ z. B. kommt also der Zahl 2,71 näher als jeder andere Bruch dessen Nenner nicht grösser als 7 ist. Man hat $\frac{19}{7} = 2,714\ldots$ so dass dieser Werth noch in der zweiten Decimalstelle mit 2,71 übereinstimmt.

152.

Da, wie aus der Formel 29) folgt, und wie man auch an dem eben berechneten Beispiele sieht, die Nenner der Näherungsbrüche rasch wachsen, so kann man wünschen Brüche zu erhalten, deren Nenner zwischen den Nennern zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche liegen, und die ebenfalls die Eigenschaft haben, dem wahren Werthe immer näher zu kommen, je grösser ihr Nenner ist. Auch solche kann man, unter einer sogleich näher zu bestimmenden Voraussetzung, bilden; man nennt sie eingeschaltete Näherungsbrüche.

Sind nemlich $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ zwei gerade Näherungsbrüche, so sind beide kleiner als der wahre Werth, jedoch $\frac{A_k}{B_k}$ grösser als $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ und dem wahren Werthe näher. Ist nun $a_k$ grösser als die ganze Zahl $r$, so bilde man den Bruch

$$\frac{M_r}{N_r} = \frac{(a_k - r) A_{k-1} + A_{k-2}}{(a_k - r) B_{k-1} + B_{k-2}}$$

Nun ist nach Form. 30), da $k-2$ eine gerade Zahl ist,

$$A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1} = 1$$

Ferner ist

$$31)\quad \frac{M_r}{N_r} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = \frac{A_{k-2} B_{k-1} - A_{k-1} B_{k-2}}{N_r B_{k-1}} = -\frac{1}{N_r B_{k-1}}$$

also

$$\frac{M_r}{N_r} < \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}.$$

und es folgt zugleich aus 31) dass $M_r$ und $N_r$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben.

Auch ist

$$\frac{M_r}{N_r} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} = \frac{(a_k - r)(A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1})}{N_r B_{k-2}} = \frac{(a_k - r)}{N_r B_{k-2}}$$

Nun ist $a_k > r$ also auch

$$\frac{M_r}{N_r} > \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$$

Ferner

$$\frac{M_r}{N_r} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{M_r}{N_r} - \frac{a_k A_{k-1} + A_{k-2}}{a_k B_{k-1} + B_{k-2}} = \frac{a_k (B_{k-1} A_{k-2} - B_{k-2} A_{k-1})}{N_r B_k} = -\frac{a_k}{N_r B_k}$$

also $\quad \frac{M_r}{N_r} < \frac{A_k}{B_k}$

$\frac{M_r}{N_r}$ ist also ebenfalls kleiner als der Werth des Kettenbruches, und zwar demselben näher als $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$, jedoch weniger nahe als $\frac{A_k}{B_k}$. Nun ist $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ als ein ungerader Näherungsbruch grösser als der Werth des ganzen Kettenbruches, es liegt also dieser

Werth zwischen $\frac{M_r}{N_r}$ und $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$. Gäbe es nun einen Bruch $\frac{s}{t}$ mit nicht grösserem Nenner als $N_r$, welcher dem Werthe des Kettenbruches näher wäre als $\frac{M_r}{N_r}$ und zugleich kleiner als dieser Werth, so müsste $\frac{s}{t}$ zwischen $\frac{M_r}{N_r}$ und $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ liegen, und es müsste also, ohne Rücksicht auf das Zeichen,

$$\frac{s}{t} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} < \frac{M_r}{N_r} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$$

d. h.

$$\frac{sB_{k-1} - tA_{k-1}}{tB_{k-1}} < \frac{1}{N_r B_{k-1}}$$

seyn, was nicht seyn kann, da $t$ nicht grösser als $N_r$ seyn soll und $sB_{k-1} - tA_{k-1}$ (ohne Rücksicht auf das Zeichen) nicht kleiner als die Einheit seyn kann.

Indem man also $a_k - r$ allmälich $= 1, 2, \ldots a_k - 1$ setzt, erhält man $a_k - 1$ eingeschaltete Brüche, welche zwischen $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ liegen, die sämmtlich kleiner als der Werth des Kettenbruches sind und diesem näher kommen, als jeder andere Bruch mit nicht grösserem Nenner, der kleiner als dieser Werth ist.

Sind $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ zwei ungerade Näherungsbrüche, so sind beide grösser als der Werth des Kettenbruches, jedoch $\frac{A_k}{B_k}$ diesem Werthe näher. Wiederholt man die vorhergehende Betrachtung, so sieht man, dass auch hier sich immer zwischen den beiden Näherungsbrüchen $a_k - 1$ andere einschalten lassen, indem man allmälich in dem Werthe von $\frac{A_k}{B_k}$ statt $a_k$ die Werthe $1, 2, \ldots, a_k - 1$, setzt, und dass jeder die-

ser eingeschalteten Brüche grösser als der Werth des Kettenbruches und demselben näher ist, als jeder andere Bruch mit nicht grösserem Nenner, welcher grösser als dieser Werth ist.

Als wir z. B. oben die Näherungsbrüche von $\frac{271}{100}$ berechneten, fanden wir die zwei aufeinanderfolgenden geraden Näherungsbrüche $\frac{8}{3}$ und $\frac{84}{31}$. Setzen wir daher $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} = \frac{8}{3}$, $\frac{A_k}{B_k} = \frac{84}{31}$, so ist hier $a_k = 4$ und $\frac{A_k}{B_k} = \frac{4 \,.\, 19 + 8}{4 \,.\, 7 + 3}$. Zwischen $\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ lassen sich daher die drei Brüche $\frac{1 \,.\, 19 + 8}{1 \,.\, 7 + 3} = 2{,}7$; $\frac{2 \,.\, 19 + 8}{2 \,.\, 7 + 3} = 2{,}705\ldots$; $\frac{3 \,.\, 19 + 8}{3 \,.\, 7 + 3} = 2{,}708\ldots$ einschalten, sie liegen zwischen $\frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$ und $\frac{84}{31} = 2{,}709\ldots$ Die Möglichkeit solche eingeschaltete Brüche zu bilden setzt also voraus, dass $a_k > 1$, ist $a_k = 1$ so finden sie nicht statt.

### 153.

Im Vorhergehenden (§. 145—148) wurden völlig entscheidende Kennzeichen der Convergenz eines Bruches mit nur positiven Theilzählern und Theilnennern gefunden. Bei weitem schwieriger aber wird die Untersuchung, sobald die Zeichen der Theilzähler und Theilnenner beliebige sind, wovon auch der Grund leicht einzusehen ist. Ein Kettenbruch, dessen Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positiv sind, kann nemlich auf eine Reihe mit abwechselnden Zeichen zurückgeführt werden (§. 145), die Convergenz einer solchen Reihe hängt aber nur von der einzigen Bedingung ab, dass ihre Glieder unbegrenzt abnehmen. Sind dagegen die Theilzähler und Theilnenner eines Kettenbruches nicht sämmtlich positiv, so werden auch die Glieder der gleichgeltenden Reihe nicht mehr abwechselnde Zeichen haben, und die unbegrenzte Abnahme

der Glieder dieser Reihe reicht also nicht mehr aus, um über ihre Convergenz zu entscheiden. Ein Kettenbruch dieser letzteren Art kann, wie die gleichgeltende Reihe, convergiren, oscilliren oder divergiren In dem besonderen Falle, wenn alle Theilzähler positiv, alle Theilnenner negativ sind, kann man die Beschaffenheit des Kettenbruches allerdings auf die eines Kettenbruches mit nur positiven Gliedern zurückführen. Da man nemlich, ohne den Werth des Kettenbruches zu ändern, jeden Theilnenner, den dazu gehörenden und den folgenden Theilzähler mit — 1 multipliciren kann (§. 144), so hat man

$$-\left(a_0 + \frac{b_1}{a_1 + R}\right) = -a_0 - \frac{b_1}{a_1 + R} = -a_0 + \frac{b_1}{-a_1 - R}$$

Setzt man nun

$$R = \frac{b_2}{a_2 + R_1} \text{ so ist wieder } -R = \frac{-b_2}{a_2 + R_1} = \frac{b_2}{-a_2 - R_1}$$

also $-\left(a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + R_1}}\right) = -a_0 + \cfrac{b_1}{-a_1 + \cfrac{b_2}{-a_2 - R_1}}$

und indem man diese Betrachtung fortsetzt, sieht man dass überhaupt der Kettenbruch

$$-a_0 + \cfrac{b_1}{-a_1 + \cfrac{b_2}{-a_2 \ldots + \cfrac{b_m}{-a_m}}}$$

nichts anderes ist, als der Kettenbruch 1) negativ genommen und daher in denselben Fällen, wie dieser, wenn man $m$ unbegrenzt wachsen lässt, convergirt oder oscillirt.

Aus derselben Betrachtung folgt zugleich, dass man jeden Kettenbruch mit negativen Theilnennern, ohne Aenderung seines Werthes, in einen anderen verwandeln kann, welcher nur positive Theilnenner enthält, da man ja nur jeden solchen negativen Theilnenner, den dazu gehörenden und den darauf folgenden Theilzähler mit — 1 zu multipliciren braucht. Man hat daher nur die Kettenbrüche von der Form

32) $$a_0 \pm \cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\vdots}{\pm \cfrac{b_m}{a_m}}}}$$

zu betrachten, indem wir, wie bisher, die Grössen $a_0$, $a_1 \ldots$ $b_1$, $b_2 \ldots$ als positive voraussetzen*).

Diesen Kettenbruch kann man nun wieder auf die Form

33) $$h_0 \pm \cfrac{1}{h_1 \pm \cfrac{1}{h_2 \pm \cfrac{\vdots}{\pm \cfrac{1}{h_m}}}}$$

bringen, wo $h_0$, $h_1 \ldots$ dieselbe Bedeutung wie in §. 144 haben.

Bezeichnen nun $H_k$ und $L_k$ bezüglich Zähler und Nenner des Kettenbruches

$$h_0 \pm \cfrac{1}{h_1 \pm \cfrac{\vdots}{\pm \cfrac{1}{h_k}}}$$

so findet man, statt der Reihe 15), hier

34) $$\frac{H_m}{L_m} = h_0 \pm \frac{1}{L_1} \pm \frac{1}{L_1 L_2} \ldots \pm \frac{1}{L_{m-1} L_m} \text{ **)}$$

wo die Zeichen in beliebiger Ordnung auf einander folgen können. Lässt man nun $m$ unbegrenzt wachsen, so ist wieder der unendliche Kettenbruch 33) in eine unendliche Reihe verwandelt, aus deren Beschaffenheit sich die des Kettenbruches ergiebt. Da wir aber früher gesehen haben, dass es

*) Der Theilnenner $a_0$ hat natürlich auf die Beschaffenheit des Kettenbruches keinen Einfluss, man kann ihn daher immer bei dieser Untersuchung als positiv voraussetzen auch wenn er ursprünglich negativ ist.

**) Aus Formel 7) folgt nemlich $\frac{H_{k+1}}{L_{k+1}} - \frac{H_k}{L_k} = \frac{\pm 1}{L_k L_{k+1}}$.

keine erschöpfenden Kennzeichen einer Reihe mit beliebiger Zeichenfolge giebt, so ist vorauszusehen, dass auch keine solchen für einen Kettenbruch mit beliebigen Zeichen zu finden sind.

Indessen können wir die früheren Betrachtungen benutzen, um wenigstens einen hierher gehörenden Satz zu finden. Die Reihe 34) wird nemlich, bei unbegrenzt wachsendem $m$ sicherlich nicht convergiren, wenn die einzelnen Glieder derselben einen endlichen Werth behalten, d. h. wenn $lim, L_k$ ein endlicher Werth ist. Nun ist die Grösse $L_k$ auf dieselbe Weise aus den Grössen $h_1$, $h_2$ ... zusammengesetzt, wie in dem Falle, wo alle Theilzähler positiv waren, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt einzelne Glieder in dem Werthe von $L_k$ negativ sind, während im früheren Falle alle Glieder positiv waren. Nimmt man also in $L_k$ alle Glieder positiv und bleibt der hierdurch entstehende Ausdruck für jedes $k$ ein endlicher Werth, so muss dies um so mehr der Fall seyn, wenn einzelne Glieder negativ sind. Es folgt mithin aus §. 148 der Satz:

Der Kettenbruch 32) kann nicht convergiren, wenn jede der zwei Reihen 17) und 19) convergirt. Auf diese Weise können wir uns z. B. überzeugen, dass der Kettenbruch

$$1 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{2^2}{1 - \cfrac{2^3}{1 - \ddots}}}$$

dessen $r$ter Theilzähler $= -2^r$ und dessen $r$ter Theilnenner $= 1$ ist, nicht convergirt, da jede der Reihen 17) und 19) in diesem Falle, wie schon §. 148 gefunden wurde, convergirt.

## 154.

Nach den Kettenbrüchen mit nur positiven Theilzählern und Theilnennern kommen am häufigsten diejenigen vor, bei welchen alle Theilzähler negativ, alle Theilnenner positiv sind, und in Beziehung auf diese lässt sich allerdings eine ziemlich weitgreifende Regel rücksichtlich ihrer Convergenz aufstellen. Man drücke einen solchen Kettenbruch durch

$$35)\qquad a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\ddots}{- \cfrac{b_m}{a_m}}}}$$

aus, so dass man noch immer die Grössen $a_0$, $a_1$, $a_2 \dots$ $b_1$, $b_2 \dots$ als positive voraussetzt. Bezeichnen wir wieder durch $A_k$ den Zähler, durch $B_k$ den Nenner des Kettenbruches

$$a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\ddots}{- \cfrac{b_k}{a_k}}}}$$

so ist nach Formel 7), wenn man erwägt, dass

$(-b_1).(-b_2)..(-b_{k+1}) = (-1)^{k+1} b_1 b_2 \dots b_{k+1}$ offenbar

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = (-1)^{2k+1} \frac{b_1 b_2 \dots b_{k+1}}{B_k B_{k+1}} = -\frac{b_1 b_2 \dots b_{k+1}}{B_k B_{k+1}}$$

Demnach ist

$$\frac{A_m}{B_m} = a_0 - \frac{b_1}{B_1} - \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2} \dots - \frac{b_1 b_2 \dots b_m}{B_{m-1} B_m}$$

also geht der Kettenbruch 35) bei unbegrenzt wachsendem $m$ in die Reihe

$$36)\qquad a_0 - \frac{b_1}{B_1} - \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2} \dots\dots$$

über. Sind nun die Grössen $B_1$, $B_2 \dots$ sämmtlich positiv, so sind alle Glieder dieser Reihe, das erste $a_0$ ausgenommen, negativ, die Reihe

$$\frac{b_1}{B_1} + \frac{b_1 b_2}{B_1 B_2} \dots$$

welche nur aus positiven Gliedern besteht, kann also nur convergiren oder divergiren, nicht oscilliren, mithin kann in diesem Falle auch der Kettenbruch 35) nur convergiren oder divergiren. Soll aber die Reihe 36) divergiren, so kann sie nur eine über alle Grenzen wachsende negative Grösse seyn.

Kann man daher Bedingungen nachweisen, unter welchen $A_m$ und $B_m$ für jeden Werth von $m$ positiv sind, so muss dann der Kettenbruch nothwendig convergiren.

Da der erste Theilnenner $a_0$ keinen Einfluss auf die Beschaffenheit des Kettenbruches hat, so darf man immer voraussetzen, dass er nicht kleiner als die Einheit ist. Sind nun die folgenden Theilnenner so beschaffen, dass allgemein

$$a_k \overline{\gtrless} b_k + 1$$

so werden auch $A_m$ und $B_m$ positiv seyn. Zunächst ist klar, dass unter dieser Voraussetzung sowohl $A_m$ als $B_m$ mit $m$ wachsen werden. Denn man bezeichne durch $c_m$ eine Grösse, die nur positiv (oder Null) seyn kann. Man hat also $a_m = b_m + 1 + c_m$. Nun ist im gegenwärtigen Falle (nach Form. 2) und 3)

$$A_m = a_m A_{m-1} - b_m A_{m-2}$$
$$B_m = a_m B_{m-1} - b_m B_{m-2}$$

also auch

$$A_m = (b_m + 1 + c_m) A_{m-1} - b_m A_{m-2} = A_{m-1} + b_m (A_{m-1} - A_{m-2}) + c_m A_{m-1}$$

$$B_m = (b_m + 1 + c_m) B_{m-1} - b_m B_{m-2} = B_{m-1} + b_m (B_{m-1} - B_{m-2}) + c_m B_{m-1}$$

Ist nun $A_{m-1} > A_{m-2}$ so ist auch $A_m > A_{m-1}$. Nun ist $A_1 = a_0 a_1 - b_1 = a_0 (b_1 + 1 + c_1) - b_1 = a_0 + (a_0 - 1) b_1 + a_0 c_1$, also $A_1 > a_0$ (da $a_0 - 1$ positiv ist), d. h. $A_1 > A_0$ also auch allgemein $A_m > A_{m-1}$ und da $a_0$ positiv ist, so muss umsomehr $A_1, A_2 \ldots$ positiv seyn. Ferner ist $B_m > B_{m-1}$ sobald $B_{m-1} > B_{m-2}$. Nun ist $B_1 = a_1$ und da, nach der Voraussetzung, $a_1 \overline{\gtrless} b_1 + 1$, also $a_1 > 1$, d. h. $a_1 > B_0$, so ist $B_1 > B_0$, mithin allgemein $B_m > B_{m-1}$. Da nun, wie schon bemerkt, der Werth von $a_0$ keinen Einfluss auf die Beschaffenheit des Kettenbruches hat, so können wir die Bedingung, dass $a_0 \overline{\gtrless} 1$ ist, fallen lassen, und haben dann den Satz:

Der Kettenbruch 35) convergirt, wenn allgemein $a_m \geqq b_m + 1$.

In dem besonderen Falle, wenn sämmtliche Theilzähler und Theilnenner ganze Zahlen sind, wird also dieser Kettenbruch convergiren, sobald $a_m > b_m$, insofern dann mindestens $a_m = b_m + 1$ seyn muss.

Bringt man den Kettenbruch 35) in die Form

$$37) \qquad h_0 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{h_2 - \ddots}}$$

wo $h_0, h_1 \ldots$ wieder dieselbe Bedeutung wie in 33) haben, so geht die Reihe 34) in

$$h_0 - \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_1 L_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

über, und der eben ausgesprochene Satz heisst nun:

Der Kettenbruch 37) wird convergiren, wenn allgemein $h_m \geqq 2$ ist.

Es wird unter diesen Verhältnissen zugleich der Werth des Kettenbruches 35) zwischen $a_0$ und $a_0 - 1$ liegen, d. h. mit anderen Worten, es wird der Werth des Kettenbruches

$$38) \qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ddots}}$$

zwischen 0 und 1 liegen, und dies wird auch bei jedem seiner Näherungsbrüche der Fall seyn. Man betrachte nemlich den Näherungsbruch welcher mit $a_m$ schliesst. Nach der Voraussetzung ist $a_m = b_m + \alpha_m$ wo $\alpha_m \geqq 1$ ist, mithin $\frac{b_m}{a_m} \begin{matrix} >0 \\ <1 \end{matrix}$, hieraus folgt $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} = b_{m-1} + \alpha_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} > b_{m-1}$

da $\alpha_{m-1} \geqq 1$, also $\cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}} \begin{matrix} >0 \\ <1 \end{matrix}$ und daher $a_{m-2} - \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}}$

$$= b_{m-2} + a_{m-2} - \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}} > b_{m-2} \text{ folglich } \cfrac{b_{m-2}}{a_{m-2} - \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}}} \begin{matrix} >0. \\ <1 \end{matrix}$$

Man sieht dass man diese Betrachtung in derselben Weise fortsetzen kann, und dass also auch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 \ddots - \cfrac{b_m}{a_m}}} \begin{matrix} >0 \\ <1 \end{matrix}$$

Dies gilt wie gross man auch $m$ nehmen mag, mithin liegt der Werth des Kettenbruches 38) zwischen 0 und 1.

Sind in dem Kettenbruche 38) sämmtliche Theilzähler und Theilnenner ganze Zahlen und zugleich allgemein $a_k = b_k + 1$, so sind zwar die Näherungsbrüche noch immer kleiner als die Einheit, nähern sich aber diesem Werthe unbegrenzt, so dass der Werth dieses Kettenbruches genau der Einheit gleich ist und mithin $a_0 = 1$ der Werth des Kettenbruches 35) ist.

Man setze

$$39)\qquad \frac{A'_m}{B'_m} = 1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_m}{a_m}}}}$$

so muss, wie schon oben gezeigt wurde, $B'_m > B'_{m-1}$ seyn. Da nun hier nur ganze Zahlen vorkommen, so ist die Differenz $B'_m - B'_{m-1}$ eine ganze positive Zahl, also $B'_m$ um eine ganze positive Zahl grösser als $B'_{m-1}$, d. h. bei unbegrenzt wachsendem $m$, wächst auch $B'_m$ unbegrenzt. Dagegen wird für jedes $m$ der Werth von $A'_m$ der Einheit gleich seyn. Ist nemlich $A'_{m-2} = 1$, $A'_{m-1} = 1$ so muss auch $A'_m = a_m A'_{m-1} - b_m A'_{m-2} = b_m (A'_{m-1} - A'_{m-2}) + A'_{m-1} = 1$ seyn. Nun

ist $\frac{A'_0}{B'_0} = 1$ also $A'_0 = 1$, ferner $\frac{A_1}{B_1} = 1 - \frac{b_1}{a_1} = 1 - \frac{b_1}{b_1+1}$ $= \frac{1}{b_1+1}$ also $A_1 = 1$ mithin allgemein $A'_m = 1$ und daher $\lim \frac{A'_m}{B'_m} = 0$ also der Werth des Kettenbruches 39) $= 0$ und der des Kettenbruches 35) $= a_0 - 1$.

155.

Bei den convergirenden Kettenbrüchen mit nur positiven Theilzählern und Theilnennern, ist der Werth derselben, wie oben (§. 143) bemerkt wurde, immer zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen enthalten, so dass die denselben gemeinschaftlichen ersten Ziffern auch dem wahren Werthe angehören. Bei den Kettenbrüchen von der Form 35), bei welchen allgemein $a_m \geqq b_m + 1$ ist, und die daher convergiren, ist dies nicht der Fall, vielmehr bleiben hier die Näherungsbrüche während sie beständig abnehmen, immer grösser als der Werth des ganzen Kettenbruches.

Da nemlich in der Reihe 36) alle auf $a_0$ folgenden Glieder negativ sind, so erhält man einen desto kleineren Werth, je mehr Glieder dieser Reihe man zusammen nimmt, d. h. einen je späteren Näherungsbruch man berechnet; wo man aber in der Reihe stehen bleibt, immer vernachlässigt man noch die folgenden negativen Glieder. Man kann aber zu jedem Näherungsbruche einen anderen Ausdruck bilden, welcher kleiner als der Werth des Kettenbruches ist, so dass dieser Werth wieder zwischen zwei Grenzen eingeschlossen ist. Ebenso nemlich wie früher gezeigt wurde, dass der Kettenbruch 38) positiv ist und zwischen 0 und 1 liegt, ergiebt sich auch dass

$$\cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} - \cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2} - \ddots}}$$

ein ächter positiver Bruch ist, man setze seinen Werth $= M$, den Werth des Kettenbruches 35) aber $= W$, so ist

$$W = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k - M}}}}$$

Hat man nun den Näherungsbruch $a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k}}}}$

berechnet, welcher mithin grösser als $W$ ist, so bilde man dazu den Kettenbruch

$$40)\qquad a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k - 1}}}}$$

welcher sich von dem vorhergehenden nur dadurch unterscheidet dass der letzte Theilnenner $a_k - 1$ ist. Bezeichnet man nun Zähler und Nenner dieses Kettenbruches bezüglich durch $Z_k$ und $N_k$ so ist

$$Z_k = (a_k - 1) A_{k-1} - b_k A_{k-2}$$

also da $a_k = b_k + \alpha_k$, wo $\alpha_k \geqq 1$,

$$Z_k = b_k (A_{k-1} - A_{k-2}) + (\alpha_k - 1) A_{k-1}$$

Setzt man wieder $a_0 \geqq 1$ so ist $A_{k-1} > A_{k-2}$, also jedenfalls $Z_k$ eine positive Grösse, ebenso zeigt man dass $N_k$ positiv ist, mithin $\frac{Z_k}{N_k}$ positiv. Da aber $M$ ein ächter positiver Bruch ist, so ist

$$\frac{b_k}{a_k - 1} > \frac{b_k}{a_k - M}$$

also

$$a_{k-1} - \frac{b_k}{a_k - 1} < a_{k-1} - \frac{b_k}{a_k - M}$$

daraus folgt wieder

$$\frac{b_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{b_k}{a_k - 1}} > \frac{b_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{b_k}{a_k - M}},$$

und

$$a_{k-2} - \cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{b_k}{a_k - 1}} < a_{k-2} - \cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{b_k}{a_k - M}}.$$

Setzt man diese Betrachtung fort, so ergiebt sich, dass der Kettenbruch 40) kleiner als $W$ ist.

Die nach Formel 40) berechneten Werthe mögen mittelbare Näherungsbrüche heissen. Auch diese haben die Eigenschaft, dass sie dem Werthe des ganzen Kettenbruches desto näher kommen je grösser $k$ ist. Denn es ist

$$\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k - \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} - 1}}}} = \frac{(a_{k+1} - 1) A_k - b_{k+1} A_{k-1}}{(a_{k+1} - 1) B_k - b_{k+1} B_{k-1}}$$

ferner

$$\frac{Z_k}{N_k} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k - 1}}} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_k}{a_k - \cfrac{1}{1}}}} = \frac{A_k - A_{k-1}}{B_k - B_{k-1}}$$

Hieraus findet man

$$\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} - \frac{Z_k}{N_k} = \frac{(a_{k+1} - 1 - b_{k+1})(A_{k-1} B_k - A_k B_{k-1})}{N_k N_{k+1}}$$

Der Nenner $N_k N_{k+1}$ ist positiv, und da $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} > \frac{A_k}{B_k}$ so ist

auch $A_{k-1} B_k - A_k B_{k-1}$ positiv. Ist mithin $a_{k+1} > b_{k+1} + 1$, so ist auch $\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} > \frac{Z_k}{N_k}$, d. h. die mittelbaren Näherungswerthe wachsen und kommen daher dem Werthe des Kettenbruches immer näher. Nur in dem besonderen Falle wenn $a_{k+1} = b_{k+1} + 1$, ist auch $\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} = \frac{Z_k}{N_k}$.

Man habe z. B. den Kettenbruch

$$1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \ddots}}}}$$

wo mithin sämmtliche Theilzähler der Einheit gleich sind, während die Theilnenner aus den auf einanderfolgenden ungeraden ganzen Zahlen bestehen, so findet man

| Näherungswerthe. | Mittelbare Näherungswerthe. |
|---|---|
| $\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots$ | $\frac{1}{2} = 0{,}5$ |
| $\frac{9}{14} = 0{,}64285\ldots$ | $\frac{7}{11} = 0{,}63636\ldots$ |
| $\frac{61}{95} = 0{,}64210\ldots$ | $\frac{52}{81} = 0{,}64197\ldots$ |
| $\frac{540}{841} = 0{,}64209\ldots$ | $\frac{479}{746} = 0{,}64209\ldots$ |
| . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . |

Der Werth des Kettenbruches muss also ebenfalls mit den Ziffern 0,64209 beginnen, und ist mithin schon bis auf 5 Decimalstellen genau gefunden.

## 156.

Es wurde früher (§. 149) bemerkt, dass wenn der Kettenbruch 1) nur positive Theilzähler und Theilnenner hat und convergirt, auch jeder Theil

$$\cfrac{b_{k+2}}{a_{k+2}+\ddots}$$

convergiren muss. Bei den Kettenbrüchen mit beliebigen Zeichen ist dies anders. Ein solcher Kettenbruch kann convergiren, während ein Theil desselben divergirt. Denn ist z. B.

$$\pm \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} \pm \ddots} = \pm \infty$$

so ist auch

$$a_k \pm \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} \pm \ddots} = \pm \infty$$

und daher

$$\pm \cfrac{b_k}{a_k \pm \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} \pm \ddots}} = 0$$

Dieser Theil des Kettenbruches kann also ganz vernachlässigt werden und der ganze unendliche Kettenbruch 32) ist alsdann dem endlichen Kettenbruche

$$a_0 \pm \cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{\vdots}{\pm \cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}}}}$$

gleich. Es folgt hieraus ein wesentlicher Unterschied zwischen einem divergirenden Kettenbruche und einer divergirenden Reihe. Wenn eine Reihe divergirt und man sondert eine Anzahl ihrer ersten Glieder ab, so bilden die übrigen Glieder noch immer eine divergirende Reihe. Wenn aber der Kettenbruch 32) divergiren soll, so darf der Theil

41) $$a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \ddots}$$

nicht divergiren, sonst hätte der Kettenbruch 32) den Werth $a_0 \pm \frac{b_1}{\pm \infty} = a_0$. Vielmehr muss alsdann der Theil 41) den Werth Null haben, denn nur unter dieser Bedingung wird der Kettenbruch 32) $= a_0 \pm \frac{b_1}{0} = \pm \infty$. Es ist also einerlei, ob man die Bedingungen sucht, unter welchen 32) divergirt, oder unter welchen 41) den Werth Null hat. Ein divergirender Kettenbruch hat daher insofern ein grösseres Interesse als eine divergirende Reihe oder ein divergirendes Produkt, insofern er immer zugleich den Werth eines aus ihm fliessenden convergirenden Kettenbruchs angiebt.

Dass z. B. der Kettenbruch

$$1 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{3}{3 - \cfrac{4}{4 - \ddots}}}$$

divergirt, beweist man, in dem man zeigt, dass der Kettenbruch

$$2 - \cfrac{3}{3 - \cfrac{4}{4 - \ddots}}$$

den Werth Null hat, was man auf folgende Weise findet. Berechnet man die Näherungsbrüche des letzteren Kettenbruches, welche

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{3}, \frac{4}{8}, \frac{5}{25}, \ldots .$$

seyn werden, und setzt daher $A_0 = 2$, $A_1 = 3$ $A_2 = 4 \ldots$ so findet man allgemein $A_r = r + 2$. Ist dies nemlich bis zu einem gewissen Werth von $r$ richtig, so folgt $A_{r+1} = (r+3) A_r - (r+3) A_{r-1} = (r+3)(A_r - A_{r-1}) = (r+3)[(r+2) - (r+1)] = r+3$. Nun ist die Formel schon für $r = 0, 1, 2$ als richtig nachgewiesen, also gilt sie allgemein. Setzt man ferner $B_1 = 3$ $B_2 = 8$, $B_3 = 25 \ldots$ so findet man allgemein $B_r = (r+2)$ $[2 + 3 + 3 . 4 + 3 . 4 . 5 + \ldots . + 3 . 4 \ldots r]$, sobald $r \gtreqless 2$. Ist dies nemlich bis zu einem gewissen Werthe

des $r$ richtig, so folgt $B_{r+1} = (r+3)(r+2)[2+3+\ldots+3.4\ldots r] - (r+3)(r+1)[2+3+\ldots+3.4\ldots(r-1)] = (r+3)[2+3+\ldots+3.4\ldots r] + (r+3)(r+1)[2+3+\ldots+3.4\ldots r] - (r+3)(r+1)[2+3+\ldots+3.4\ldots(r-1)] = (r+3)[2+3+\ldots+3.4\ldots r] + (r+3)(r+1).3.4\ldots r$ also $B_{r+1} = (r+3)[2+3\ldots+3.4\ldots r+3.4\ldots(r+1)]$. Da nun die Formel für $r = 2$, $r = 3$ richtig ist, so gilt sie allgemein. Demnach hat man, sobald $r \gtreqless 2$

$$\frac{A_r}{B_r} = \frac{1}{2+3+3.4+\ldots+3.4\ldots r}$$

und da die Reihe $2+3+3.4+3.4.5+\ldots$, welche den Nenner dieses Ausdruckes bildet, divergirt, so ist $\lim \frac{A_r}{B_r} = 0$, d. h.

$$2 - \cfrac{3}{3 - \cfrac{4}{4 - \ddots}} = 0$$

Aus diesem Resultate folgt dann auch weiter

$$\cfrac{3}{3 - \cfrac{4}{4 - \cfrac{5}{5 - \ddots}}} = 2$$

und, wie man leicht findet, allgemein, für jede ganze Zahl $m$

$$\cfrac{m}{m - \cfrac{m+1}{m+1 - \cfrac{m+2}{m+2 - \ddots}}} = \frac{m-1}{m-2}$$

Ist nemlich dieser Ausdruck für irgend einen Werth von $m$ richtig, so muss er auch für $m+1$ gelten, denn setzt man

$$\cfrac{m+1}{m+1 - \cfrac{m+2}{m+2 - \ddots}} = x$$

so ist mithin $\frac{m}{m-x} = \frac{m-1}{m-2}$ also

$$x = \frac{m}{m-1}$$

Da nun dieser Ausdruck wirklich für $m = 3$ statt hat, so gilt er auch für jeden grösseren Werth.

157.

Im Vorhergehenden wurde die Verwandlung eines Kettenbruches in eine Reihe dazu gebraucht, die Beschaffenheit des Kettenbruches zu ermitteln. Man findet aber zugleich durch dieses Verfahren den Werth jedes Kettenbruches, den man auf eine Reihe von bekanntem Werthe zurück führen kann. Sey z. B. der Werth des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\ddots}}}}$$

zu finden. Hier ist mit dem Kettenbruch 1) verglichen, $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2^2$ allgemein $b_r = (r-1)^2$ sobald $r > 1$. Die Reihe 9) des §. 144 geht daher in

$$\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1.1.2^2}{B_2 B_3} \ldots \pm \frac{1.1.2^2.3^2 \ldots r^2}{B_r B_{r+1}} \ldots$$

über. Nun ist hier $B_r = B_{r-1} + (r-1)^2 B_{r-2}$; ist also $B_{r-1} = (r-1) B_{r-2}$ so ist auch $B_r = r B_{r-1}$. Da aber in der That $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ also $B_2 = 2 B_1$, so ist auch $B_3 = 3.2$, $B_4 = 4.3.2$ und allgemein $B_r = r(r-1)(r-2) \ldots 1$. Das allgemeine Glied der Reihe ist demnach

$$\pm \frac{2^2.3^2 \ldots r^2}{(1.2 \ldots r)(1.2 \ldots r+1)} = \pm \frac{1}{r+1}$$

und die Reihe wird $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ deren Werth $\log 2$ ist (§. 83 Form. 12), dies ist mithin auch der Werth des Kettenbruchs.

158.

Wenn man das Verfahren, durch welches ein Kettenbruch in eine Reihe verwandelt wird, umkehrt, so kann man dadurch jede gegebene Reihe in einen Kettenbruch verwandeln.

Wie nemlich auch eine Reihe beschaffen sey, so wird man sich dieselbe immer in der Form

$$42)\quad \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4} \dots\dots$$

denken können, sobald man für $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$... sowohl positive als negative, rationale oder irrationale Zahlen setzen kann. Vergleicht man nun diese Form mit der Reihe 15) des §. 144 so ergiebt sich

$$\alpha_0 = h_0;\ \alpha_1 = L_1;\ \alpha_2 = L_1 L_2;\ \alpha_3 = L_2 L_3;\ \alpha_4 = L_3 L_4 \text{ u. s. w.}$$

also

$$L_1 = \alpha_1;\ L_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1};\ L_3 = \frac{\alpha_3\,\alpha_1}{\alpha_2};\ L_4 = \frac{\alpha_2\,\alpha_4}{\alpha_1\,\alpha_3};$$

und allgemein

$$L_{2r} = \frac{\alpha_2\,.\,\alpha_4\,.\dots.\,\alpha_{2r}}{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots.\,\alpha_{2r-1}};\ L_{2r+1} = \frac{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots.\,\alpha_{2r+1}}{\alpha_2\,.\,\alpha_4\,.\dots.\,\alpha_{2r}};$$

nun ist (§. 144 Form. 14)

$$L_{2r} = h_{2r} L_{2r-1} + L_{2r-2}$$

oder

$$h_{2r} = \frac{L_{2r} - L_{2r-2}}{L_{2r-1}}$$

also auch

$$43)\quad h_{2r} = \frac{\dfrac{\alpha_2\,.\,\alpha_4\dots\alpha_{2r}}{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots\alpha_{2r-1}} - \dfrac{\alpha_2\,.\,\alpha_4\dots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots\alpha_{2r-3}}}{\dfrac{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\,.\,\alpha_4\dots\alpha_{2r-2}}}$$

$$= \left(\frac{\alpha_2\,.\,\alpha_4\dots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\,.\,\alpha_3\dots\alpha_{2r-1}}\right)^2 (\alpha_{2r} - \alpha_{2r-1})$$

und ebenso findet man

$$44)\quad h_{2r+1} = \left(\frac{\alpha_1\dots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\dots\alpha_{2r}}\right)^2 (\alpha_{2r+1} - \alpha_{2r})$$

Indem man in diesen Formeln allmälich $r = 1, 2, \dots$ setzt, findet man also die Werthe von $h_2$, $h_3$.... auch ist $h_0 = \alpha_0$

und $h_1 = L_1 = \alpha_1$, mithin geht der Kettenbruch 11) des §. 144 in

$$45)\quad \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1^2} + \cfrac{1}{\cfrac{(\alpha_3-\alpha_2)\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \cfrac{1}{\cfrac{(\alpha_4-\alpha_3)\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2} + \cfrac{1}{\cfrac{(\alpha_5-\alpha_4)\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^2} + \ddots}}}}}$$

über, in welchen also die Reihe 42) verwandelt ist. Man kann aber diesen Kettenbruch auf eine einfachere Gestalt bringen. Nimmt man nemlich den Theil

$$\cfrac{1}{\cfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1^2} + \cfrac{1}{(\alpha_3-\alpha_2)\,\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}}$$

heraus, so kann man statt dessen, ohne den Werth von 45) zu ändern, nach §. 144 auch schreiben

$$\cfrac{\alpha_1^2\,.\,1}{\alpha_1^2\left(\cfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1^2}\right) + \cfrac{\alpha_1^2}{(\alpha_3-\alpha_2)\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}} = \cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1 + \cfrac{\alpha_1^2}{(\alpha_3-\alpha_2)\,\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}}$$

Der Kettenbruch 45) geht hierdurch in

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1 + \cfrac{\alpha_1^2}{\cfrac{(\alpha_3-\alpha_2)\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \cfrac{1}{\cfrac{(\alpha_4-\alpha_3)\,\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2} + \cfrac{1}{\cfrac{(\alpha_5-\alpha_4)\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^2} + \ddots}}}}}$$

über. Nimmt man wieder hieraus den Theil

$$\cfrac{\alpha_1^2}{(\alpha_3-\alpha_2)\,\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \cfrac{1}{(\alpha_4-\alpha_3)\,\cfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2}}}$$

so kann man statt dessen

$$\frac{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cdot\alpha_1^2}{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(\alpha_3-\alpha_2)\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\frac{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}{(\alpha_4-\alpha_3)\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2}}} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3-\alpha_2+\frac{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}{(\alpha_4-\alpha_3)\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2}}}$$

schreiben, so dass man nun statt 45) den Kettenbruch

$$46)\quad \alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1+\cfrac{\alpha_2^2}{\alpha_3-\alpha_2+\cfrac{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}{(\alpha_4-\alpha_3)\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_3^2}+\cfrac{1}{(\alpha_5-\alpha_4)\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+\ddots}}}}}$$

hat. Gesetzt nun man habe durch Fortsetzung dieses Verfahrens gefunden, dass man statt 45) auch setzen kann

$$47)\quad \alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1+\cfrac{\alpha_2^2}{\alpha_3-\alpha_2+\begin{matrix}\vdots\\ +\cfrac{\alpha_{2r-2}^2}{\alpha_{2r-1}-\alpha_{2r-2}+\cfrac{\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-3}}\right)^2}{(\alpha_{2r}-\alpha_{2r-1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}\right)^2+\beta}}\end{matrix}}}}$$

so dass $\beta = \cfrac{1}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2+\ddots}$

und dieser Kettenbruch, von dem Gliede $\cfrac{1}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2}$

$= \frac{1}{h_{2r+1}}$ an, mit dem Kettenbruche 45) identisch ist, so kann

man, indem man den Theil

$$\frac{\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-3}}\right)^2}{(\alpha_{2r}-\alpha_{2r-1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}\right)^2+\frac{1}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2}}$$

herausnimmt und Zähler und Nenner mit $\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}\right)^2$ multiplicirt, statt dessen auch setzen

$$\frac{(\alpha_{2r-1})^2}{(\alpha_{2r}-\alpha_{2r-1})+\frac{\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}\right)^2}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2+\frac{1}{\ddots}}}$$

wodurch der Ausdruck 47) in

48) $$\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3-\alpha_2+\vdots+\frac{(\alpha_{2r-1})^2}{\alpha_{2r}-\alpha_{2r-1}+\frac{\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}\right)^2}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2+\gamma}}}}}$$

wo $\gamma=\frac{1}{(\alpha_{2r+2}-\alpha_{2r+1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}}\right)^2+\frac{1}{\ddots}}$,

übergeht. Nimmt man nun hier den Theil

$$\frac{\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r-2}}\right)^2}{(\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}\right)^2+\cfrac{1}{(\alpha_{2r+2}-\alpha_{2r+1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}}\right)^2}}$$

heraus und multiplicirt Zähler und Nenner mit $\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}\right)^2$ so verwandelt er sich in

$$\cfrac{\alpha_{2r}^2}{\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r}+\cfrac{\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}\right)^2}{(\alpha_{2r+2}-\alpha_{2r+1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}}\right)^2}}$$

und man erhält statt 48)

49) $$\alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1+\vdots+\cfrac{\alpha_{2r}^2}{\alpha_{2r+1}-\alpha_{2r}+\cfrac{\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r-1}}\right)^2}{(\alpha_{2r+2}-\alpha_{2r+1})\left(\frac{\alpha_2\ldots\alpha_{2r}}{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}}\right)^2+\delta}}}}$$

wo $\delta=\cfrac{1}{(\alpha_{2r+3}-\alpha_{2r+2})\left(\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}}{\alpha_2\ldots\alpha_{2r+2}}\right)^2+\ddots}$

Nun erhält man den Ausdruck 49) aus dem Ausdrucke 47) indem man $r+1$ statt $r$ setzt. Ist also der Ausdruck 47) für irgend ein $r$ richtig, so gilt er allgemein für jedes $r$. Wie aber die Formel 46) zeigt, gilt dieser Ausdruck in der That wenn $r=2$ setzt. Es folgt demnach, dass man die

Reihe 42), wenn sie convergirt, in den gleichgeltenden Kettenbruch

$$50)\qquad \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \cfrac{\alpha_2^2}{\alpha_3 - \alpha_2 + \cfrac{\alpha_3^2}{\alpha_4 - \alpha_3 + \ddots}}}}$$

verwandeln kann, in welchem das allgemeine Glied die Form $\frac{\alpha_r^2}{\alpha_{r+1} - \alpha_r}$ hat. Auf diese Weise erhält man aus der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

wo nun $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ allgemein $\alpha_r = r$ zu setzen ist, den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \ddots}}}$$

während oben aus diesem Kettenbruche die Reihe gefunden wurde.

Aus §. 79 Form. 5 folgt, wenn man $x = -1$ setzt,

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \dots.$$

Mit der Reihe 42) verglichen, setze man hier $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1.2$, $\alpha_4 = 1.2.3$ u. s. w. so erhält man aus 50)

$$\frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{(1.2)^2}{2(1.2) + \cfrac{(1.2.3)^2}{3(1.2.3) + \cfrac{(1.2.3.4)^2}{4(1.2.3.4) + \ddots}}}}}}$$

Nun ist

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{x}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}} = \frac{1}{1+x}$$

also

$$\frac{1}{e} = \cfrac{1}{1+1+\cfrac{(1.2)^2}{2(1.2)+\cfrac{(1.2.3)^2}{3(1.2.3)+\cfrac{(1.2.3.4)^2}{4(1.2.3.4)+\ddots}}}}$$

oder

$$e = 2 + \cfrac{(1.2)^2}{2(1.2)+\cfrac{(1.2.3)^2}{3(1.2.3)+\cfrac{(1.2.3.4)^2}{4(1.2.3.4)+\ddots}}}$$

Schreibt man nun $\frac{2}{2+3(2.3)}$ statt $\frac{(1.2)^2}{2(1.2)+(1.2.3)^2}$

ferner $\frac{3}{3+4(2.3.4)}$ statt $\frac{3(2.3)}{3(1.2.3)+(1.2.3.4)^2}$

u. s. w.

so ergiebt sich

$$e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ddots}}}$$

Betrachtet man die allgemeinere Form

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots$$

so ist

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{x},\ \alpha^3 = \frac{1.2}{x^2},\ \alpha_4 = \frac{1.2.3}{x^3} \ldots\ldots$$

also zunächst

$$e^x = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{x} - 1 + \cfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1.2}{x^2} - \frac{1}{x} + \cfrac{\left(\frac{1.2}{x}\right)^2}{\frac{1.2.3}{x^3} - \frac{1.2}{x^2} + \ddots}}}$$

oder

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - x + \cfrac{1}{\frac{2}{x} - 1 + \cfrac{\frac{1}{x}\left(\frac{1.2}{x}\right)^2}{\left(\frac{1.2}{x}\right)^2\left(\frac{3}{x} - 1\right) + \ddots}}}$$

und indem man die Brüche wegschafft findet man schliesslich

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - x + \cfrac{x}{2 - x + \cfrac{2x}{3 - x + \cfrac{3x}{4 - x + \ddots}}}}$$

Wollte man dagegen unmittelbar die Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

in einen Kettenbruch verwandeln, so könnte man

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -\frac{1}{x},\ \alpha_3 = \frac{1.2}{x^2},\ \alpha_4 = -\frac{1.2.3}{x^3} \ \ldots.$$

setzen und fände zunächst

$$e^x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \cfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + 1\right) + \cfrac{\left(\frac{1.2}{x^2}\right)^2}{-\frac{1.2}{x^2}\left(\frac{3}{x} + 1\right) + \ddots}}}}$$

und nach gehöriger Reduktion

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - \cfrac{1 \,.\, x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \ddots}}}}$$

Nun ist aber, was auch $z$ bedeute,

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - z}} = 1 + \frac{x}{1 - z}$$

also hat man auch

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{1 \,.\, x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \ddots}}}$$

Diese letztere Form hätte man unmittelbar gefunden, wenn man

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \frac{1}{x},\ \alpha_2 = -\frac{1\,.\,2}{x^2},\ \alpha_3 = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{x^3} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt hätte.

159.

Da im Vorhergehenden nachgewiesen worden ist, dass man jede Reihe in einen gleichgeltenden Kettenbruch und jeden Kettenbruch in eine gleichgeltende Reihe verwandeln kann, früher aber (§. 138) gezeigt wurde, dass man jede Reihe in ein gleichgeltendes Produkt, und jedes Produkt in eine gleichgeltende Reihe verwandeln kann, so folgt hieraus von selbst, dass man auch jeden Kettenbruch in ein gleichgeltendes Produkt und jedes Produkt in einen gleichgeltenden Kettenbruch verwandeln kann. Man kann aber diese Beziehung zwischen Kettenbrüchen und Produkten auch leicht ohne Einmischung der Reihen nachweisen.

Soll nemlich der Kettenbruch 1) dessen Werth $\frac{A_m}{B_m}$ ist, in ein gleichgeltendes Produkt verwandelt werden, so hat man nur

$$\frac{A_m}{B_m} = a_0 \cdot \frac{\left(\frac{A_1}{B_1}\right)}{a_0} \cdot \frac{\left(\frac{A_2}{B_2}\right)}{\left(\frac{A_1}{B_1}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{A_3}{B_3}\right)}{\left(\frac{A_2}{B_2}\right)} \cdots \frac{\left(\frac{A_m}{B_m}\right)}{\left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right)}$$

zu setzen, also, wenn $m$ unbegrenzt wächst, und der Kettenbruch 1) convergirt, so wird derselbe hierdurch in ein convergentes unendliches Produkt verwandelt, und es ist

$$51)\quad \frac{A_m}{B_m} = a_0 \cdot \frac{A_1}{a_0 B_1} \cdot \frac{A_2 B_1}{A_1 B_2} \cdot \frac{A_3 B_2}{A_2 B_3} \cdots\cdots$$

oder wenn man $A_1 = P_1$; $a_0 B_1 = p_1$ und allgemein $A_k B_{k-1} = P_k$; $A_{k-1} B_k = p_k$ setzt,

$$52)\quad \frac{A_m}{B_m} = a_0 \cdot \frac{P_1}{p_1} \cdot \frac{P_2}{p_2} \cdot \frac{P_3}{p_3} \cdots\cdots$$

Es ist zugleich jeder Näherungsbruch $\frac{A_k}{B_k}$ gleichgeltend mit dem entsprechenden Theile $a_0 \cdot \frac{P_1}{p_1} \cdot \frac{P_2}{p_2} \cdots \frac{P_k}{p_k}$ des unendlichen Produktes.

Es wurde oben der Kettenbruch

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ddots}}}$$

gefunden. Soll dieser Kettenbruch in ein Produkt verwandelt, werden, so berechnet man die Näherungswerthe und findet zunächst

$$a_0 = 2;\ \frac{A_1}{B_1} = \frac{6}{2};\ \frac{A_2}{B_2} = \frac{24}{9};\ \frac{A_3}{B_3} = \frac{120}{44};\ \frac{A_4}{B_4} = \frac{720}{265}$$

Allgemein ist $A_k = (k+2) A_{k-1}$; $B_k = (k+2) B_{k-1} \pm 1$, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist.

Dieses Gesetz findet nemlich, wie man sieht, bei den ersten Näherungsbrüchen wirklich statt. Denn es ist

$A_1 = 3.2$; $B_1 = 3.1 - 1$; $A_2 = 4.6$; $B_2 = 4.2 + 1$; $A_3 = 5.24$; $B_3 = 5.9 - 1$ u. s. w.

Sey also bis zu einem bestimmten $k$ wirklich

$$A_k = (k+2) A_{k-1}; \; B_k = (k+2) B_{k-1} \pm 1$$

so ist

$$A_{k+1} = (k+2) A_k + (k+2) A_{k-1} = (k+2)(A_k + A_{k-1})$$
$$= (k+2)(k+3) A_{k-1} = (k+3) A_k$$

$$B_{k+1} = (k+2) B_k + (k+2) B_{k-1} = (k+2)(B_k + B_{k-1})$$
$$= (k+2)[(k+3) B_{k-1} \pm 1] = (k+3) B_k \mp 1$$

Das Gesetz ist also allgemein gültig. Demnach ist $A_k B_{k-1} = P_k = (k+2) A_{k-1} B_{k-1}$; $A_{k-1} B_k = p_k = A_{k-1}[(k+2) B_{k-1} \pm 1]$ und wenn man $\frac{P_k}{A_{k-1}} = M_k$; $\frac{p_k}{A_{k-1}} = m_k$ setzt, so ist $M_k = (k+2) B_{k-1}$; $m_k = B_k = (k+2) B_{k-1} \pm 1 = M_k \pm 1$, ferner $M_{k+1} = (k+3) B_k = (k+3) m_k$; $m_{k+1} = M_{k+1} \pm 1$.

Nun kann man statt des Ausdrucks 52) auch setzen

$$\frac{A_m}{B_m} = a_0 \cdot \frac{M_1}{m_1} \cdot \frac{M_2}{m_2} \cdot \frac{M_3}{m_3} \cdots\cdots$$

oder

$$\frac{A_m}{B_m} = a_0 \cdot \frac{M_1}{M_1 - 1} \cdot \frac{M_2}{M_2 + 1} \cdot \frac{M_3}{M_3 - 1} \cdots\cdot$$

Im gegenwärtigen Falle ist also

$$e = a_0 \cdot \frac{M_1}{M_1 - 1} \cdot \frac{4(M_1 - 1)}{4(M_1 - 1) + 1} \cdot \frac{5[4(M_1 - 1) + 1]}{5[4(M_1 - 1) + 1] - 1} \cdots\cdot$$

Nun ist $a_0 = 2$, $M_1 = 3$ also

$$e = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{45}{44} \cdot \frac{264}{265} \cdots\cdot$$

160.

Soll ein Produkt

$$\frac{u_1}{v_1} \cdot \frac{u_2}{v_2} \cdot \frac{u_3}{v_3} \cdots\cdot$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden, so setze man statt dessen

$$53)\qquad 1 \,.\, \frac{u_1}{v_1} \,.\, \frac{u_2}{v_2} \,.\, \frac{u_3}{v_3} \ldots .$$

Soll nun dieses letztere Produkt in einen Kettenbruch

$$1)\qquad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}}$$

verwandelt werden, so setze man nach Formel 51)

$1 = a_0$; $u_1 = A_1$; $v_1 = a_0 B_1 = B_1$; $A_2 B_1 = u_2$; $A_1 B_2 = v_2$ also $A_2 = \frac{u_2}{v_1}$; $B_2 = \frac{v_2}{u_1}$; $A_3 B_2 = u_3$; $A_2 B_3 = v_3$ also $A_3 = \frac{u_1 u_3}{v_2}$; $B_3 = \frac{v_1 v_3}{u_2}$; ferner $A_4 = \frac{u_2 u_4}{v_1 v_3}$; $B_4 = \frac{v_2 v_4}{u_1 u_3}$ und allgemein

$$A_{2k} = \frac{u_2 u_4 \ldots u_{2k}}{v_1 v_3 \ldots v_{2k-1}};\quad A_{2k+1} = \frac{u_1 u_3 \ldots u_{2k+1}}{v_2 v_4 \ldots v_{2k}};\quad B_{2k} = \frac{v_2 \ldots v_{2k}}{u_1 \ldots u_{2k-1}};$$

$$B_{2k+1} = \frac{v_1 \ldots v_{2k+1}}{u_2 \ldots u_{2k}}$$

Nun ist $A_1 = a_1 a_0 + b_1 = a_1 + b_1$ und $B_1 = a_1$ also

$$b_1 = A_1 - B_1 = u_1 - v_1;\quad a_1 = v_1$$

Ferner

$$A_2 = a_2 A_1 + b_2;\quad B_2 = a_2 B_1 + b_2$$

mithin

$$a_2 = \frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1} = \frac{u_1 u_2 - v_1 v_2}{u_1 v_1 (u_1 - v_1)}$$

$$b_2 = A_2 - a_2 A_1 = \frac{u_2}{v_1} - \frac{u_1 u_2 - v_1 v_2}{u_1 v_1 (u_1 - v_1)} u_1 = -\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$$

Ist $k > 1$ so findet man ebenso aus den Gleichungen

$$A_k = a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2}$$

$$B_k = a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2}$$

durch Elimination die Werthe

$$a_k = \frac{A_k B_{k-2} - B_k A_{k-2}}{A_{k-1} B_{k-2} - B_{k-1} A_{k-2}}$$

$$b_k = \frac{A_k B_{k-1} - B_k A_{k-1}}{A_{k-2} B_{k-1} - B_{k-2} A_{k-1}}$$

und mithin

$$a_{2k} = \frac{A_{2k} B_{2k-2} - B_{2k} A_{2k-2}}{A_{2k-1} B_{2k-2} - B_{2k-1} A_{2k-2}}$$

$$b_{2k} = \frac{A_{2k} B_{2k-1} - B_{2k} A_{2k-1}}{A_{2k-2} B_{2k-1} - B_{2k-2} A_{2k-1}}$$

$$a_{2k+1} = \frac{A_{2k+1} B_{2k-1} - B_{2k+1} A_{2k-1}}{A_{2k} B_{2k-1} - B_{2k} A_{2k-1}}$$

$$b_{2k+1} = \frac{A_{2k+1} B_{2k} - B_{2k+1} A_{2k}}{A_{2k-1} B_{2k} - B_{2k-1} A_{2k}},$$

Setzt man in diesen letzten Ausdrücken statt $A_{2k}$; $B_{2k}$ u.s.w. ihre früher gefundenen Werthe, so ergiebt sich

$$a_{2k} = \frac{\frac{u_2 u_4 \ldots u_{2k}}{v_1 v_3 \ldots v_{2k-1}} \cdot \frac{v_2 \ldots v_{2k-2}}{u_1 \ldots u_{2k-3}} - \frac{v_2 \ldots v_{2k}}{u_1 \ldots u_{2k-1}} \cdot \frac{u_2 \ldots u_{2k-2}}{v_1 \ldots v_{2k-3}}}{\frac{u_1 \ldots u_{2k-1}}{v_2 \ldots v_{2k-2}} \cdot \frac{v_2 \ldots v_{2k-2}}{u_1 \ldots u_{2k-3}} - \frac{v_1 \ldots v_{2k-1}}{u_2 \ldots u_{2k-2}} \cdot \frac{u_2 \ldots u_{2k-1}}{v_1 \ldots v_{2k-3}}}$$

$$= \frac{u_2 \ldots u_{2k-2}}{u_1 \ldots u_{2k-1}} \cdot \frac{v_2 \ldots v_{2k-2}}{v_1 \ldots v_{2k-1}} \cdot \frac{u_{2k-1} u_{2k} - v_{2k-1} v_{2k}}{u_{2k-1} - v_{2k-1}}$$

$$b_{2k} = \frac{\frac{u_2 \ldots u_{2k}}{v_1 \ldots v_{2k-1}} \cdot \frac{v_1 \ldots v_{2k-1}}{u_2 \ldots u_{2k-2}} - \frac{v_2 \ldots v_{2k}}{u_1 \ldots u_{2k-1}} \cdot \frac{u_1 \ldots u_{2k-1}}{v_2 \ldots v_{2k-2}}}{\frac{u_2 \ldots u_{2k-2}}{v_1 \ldots v_{2k-3}} \cdot \frac{v_1 \ldots v_{2k-1}}{u_2 \ldots u_{2k-2}} - \frac{v_2 \ldots v_{2k-2}}{u_1 \ldots u_{2k-3}} \cdot \frac{u_1 \ldots u_{2k-1}}{v_2 \ldots v_{2k-2}}}$$

$$= - \frac{u_{2k} - v_{2k}}{u_{2k-1} - v_{2k-1}}$$

und ebenso findet man

$$a_{2k+1} = \frac{u_1 \dots u_{2k-1}}{u_2 \dots u_{2k}} \cdot \frac{v_1 \dots v_{2k-1}}{v_2 \dots v_{2k}} \cdot \frac{(u_{2k} u_{2k+1} - v_{2k} v_{2k+1})}{u_{2k} - v_{2k}}$$

$$b_{2k+1} = -\frac{u_{2k+1} - v_{2k+1}}{u_{2k} - v_{2k}}.$$

Man hätte also nur diese Werthe in den Kettenbruch 1) zu setzen um die gesuchte Verwandlung des Produktes 53) in einen Kettenbruch zu erhalten. Man kann aber diesen Kettenbruch noch sehr vereinfachen. Man setze nemlich

$$54) \quad P_{2k-1} = \frac{u_{2k-1} \dots u_1}{u_{2k-2} \dots u_2} \cdot \frac{v_{2k-1} \dots v_1}{v_{2k-2} \dots v_2}$$

so dass mithin $P_{2k+1} = P_{2k-1} \cdot \frac{u_{2k+1} v_{2k+1}}{u_{2k} v_{2k}}$, also

$$P_3 = P_1 \cdot \frac{u_3 v_3}{u_2 v_2}$$

Aus 54) folgt aber $P_3 = \frac{u_3 u_1}{u_2} \cdot \frac{v_3 v_1}{v_2}$ mithin muss man $P_1 = u_1 v_1$ setzen. Unmittelbar aus 54) fände man $P_1 = \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{v_1}{v_0}$; statt des an und für sich bedeutungslosen Ausdrucks $u_0 v_0$ hat man also die Einheit zu setzen.

Ferner ist

$$a_{2k+1} = P_{2k-1} \cdot \frac{1}{u_{2k} v_{2k}} \cdot \frac{(u_{2k} u_{2k+1} - v_{2k} v_{2k+1})}{u_{2k} - v_{2k}}.$$

$$a_{2k+2} = \frac{1}{P_{2k-1}} \cdot \frac{u_{2k} v_{2k}}{u_{2k+1} v_{2k+1}} \cdot \frac{(u_{2k+1} u_{2k+2} - v_{2k+1} v_{2k+2})}{u_{2k+1} - v_{2k+1}}$$

Demnach ist

$$\frac{b_{2k+1}}{a_{2k+1} + b_{2k+2}} = \frac{-\frac{u_{2k+1} - v_{2k+1}}{u_{2k} - v_{2k}}}{\frac{P_{2k-1}}{u_{2k} v_{2k}} \frac{(u_{2k} u_{2k+1} - v_{2k} v_{2k+1})}{u_{2k} - v_{2k}} - \frac{u_{2k+2} - v_{2k+2}}{u_{2k+1} - v_{2k+1}}}$$

Gesetzt aber man habe, weil man in dem vorhergehenden Theile des Kettenbruches die Brüche weggeschafft hat, statt dessen zu schreiben

55) $$\frac{-(u_{2k-1}-v_{2k-1})(u_{2k+1}-v_{2k+1})P_{2k-1} : (u_{2k}-v_{2k})}{\frac{P_{2k-1}}{u_{2k}v_{2k}}\cdot\frac{(u_{2k}u_{2k+1}-v_{2k}v_{2k+1})}{u_{2k}-v_{2k}} - \frac{u_{2k+2}-v_{2k+2}}{u_{2k+1}-v_{2k+1}}}$$

so geht dieser letzte Ausdruck, indem man Zähler und Nenner mit $u_{2k}-v_{2k}$ multiplicirt und mit $\frac{P_{2k-1}}{u_{2k}v_{2k}}$ dividirt, und zugleich zur Abkürzung $u_{2k}-v_{2k}=m_{2k}$; $u_{2k}u_{2k+1}-v_{2k}v_{2k+1}=n_{2k}$ setzt, in

$$\frac{-m_{2k-1}\cdot m_{2k+1}u_{2k}v_{2k}}{n_{2k}-\frac{m_{2k}m_{2k+2}u_{2k}v_{2k}}{m_{2k+1}P_{2k-1}}}$$

über, und demnach ist

$$\cfrac{b_{2k+1}}{a_{2k+1}+\cfrac{b_{2k+2}}{a_{2k+2}+b_{2k+3}}} = \cfrac{-m_{2k-1}m_{2k+1}u_{2k}v_{2k}}{n_{2k}-\cfrac{\frac{m_{2k}m_{2k+2}u_{2k}v_{2k}}{m_{2k+1}P_{2k-1}}}{\frac{1}{P_{2k-1}}\cdot\frac{u_{2k}v_{2k}n_{2k+1}}{u_{2k+1}v_{2k+1}m_{2k+1}}-\frac{m_{2k+3}}{m_{2k+2}}}}$$

oder wenn man in $\frac{b_{2k+2}}{a_{2k+1}+b_{2k+3}}$ Zähler und Nenner mit $u_{2k+1}v_{2k+1}m_{2k+1}$ multiplicirt und mit $\frac{u_{2k}v_{2k}}{P_{2k-1}}$ dividirt, und zugleich bemerkt, dass man statt $\frac{u_{2k+1}v_{2k+1}P_{2k-1}}{u_{2k}v_{2k}}$ auch $P_{2k+1}$ setzen darf,

56) $$\cfrac{b_{2k+1}}{a_{2k+1}+\cfrac{b_{2k+2}}{a_{2k+2}+b_{2k+3}}} = \cfrac{-m_{2k-1}m_{2k+1}u_{2k}v_{2k}}{n_{2k}-\cfrac{m_{2k}m_{2k+2}u_{2k+1}v_{2k+1}}{n_{2k+1}-\cfrac{m_{2k+1}m_{2k+3}P_{2k+1}}{m_{2k+2}}}}$$

Demnach hat man statt $\cfrac{b_{2k+3}}{a_{2k+3}+b_{2k+4}}$ nun

$$-\cfrac{(u_{2k+1}-v_{2k+1})(u_{2k+3}-v_{2k+3})P_{2k+1}:(u_{2k+2}-v_{2k+2})}{\cfrac{P_{2k+1}}{u_{2k+2}v_{2k+2}}\cdot\cfrac{(u_{2k+2}u_{2k+3}-v_{2k+2}v_{2k+3})}{u_{2k+2}-v_{2k+2}}-\cfrac{(u_{2k+4}-v_{2k+4})}{u_{2k+3}-v_{2k+3}}}$$

zu schreiben. D. h. wir haben für $\cfrac{b_{2k+3}}{a_{2k+3}+b_{2k+4}}$ dieselbe Verwandlung gefunden, welche wir bei $\cfrac{b_{2k+1}}{a_{2k+1}+b_{2k+2}}$ als vorhanden vorausgesetzt haben (Form. 55). Ist diese Voraussetzung richtig, so geht mithin die Verwandlung des ursprünglichen Kettenbruches in derselben Weise fort. Nun beginnt aber der Kettenbruch, wenn man statt $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$ ihre Werthe setzt, mit

$$1+\frac{u_1-v_1}{v_1}-\cfrac{\cfrac{u_2-v_2}{u_1-v_1}}{\cfrac{u_1u_2-v_1v_2}{u_1v_1(u_1-v_1)}-\cfrac{\cfrac{u_3-v_3}{u_2-v_2}}{\cfrac{u_1v_1}{u_2v_2}\cdot\cfrac{(u_2u_3-v_2v_3)}{u_2-v_2}-\cfrac{u_4-v_4}{u_3-v_3}}}$$

$$=1+\frac{u_1-v_1}{v_1}-\cfrac{(u_2-v_2)u_1v_1}{u_1u_2-v_1v_2-\cfrac{\cfrac{(u_1-v_1)(u_3-v_3)u_1v_1}{u_2-v_2}}{\cfrac{u_1v_1}{u_2v_2}\cdot\cfrac{(u_2u_3-v_2v_3)}{u_2-v_2}-\cfrac{u_4-v_4}{u_3-v_3}}}$$

Es ist also wirklich an die Stelle von $\frac{b_3}{a_3+b_4}$ der Ausdruck $-\cfrac{(u_1-v_1)(u_3-v_3)u_1v_1:(u_2-v_2)}{\frac{u_1v_1}{u_2v_2}\,\frac{(u_2u_3-v_2v_3)}{u_2-v_2}-\frac{u_4-v_4}{u_3-v_3}}$ getreten, und die gemachte Voraussetzung ist richtig. Nach Form. 56) kann man also nun statt jedes Gliedes $\frac{b_k}{a_k}$ den Ausdruck $-\frac{(u_{k-2}-v_{k-2})(u_k-v_k)u_{k-1}v_{k-1}}{u_{k-1}u_k-v_{k-1}v_k}$ setzen und man hat daher schliesslich

$$57)\quad \frac{u_1}{v_1}\cdot\frac{u_2}{v_2}\cdot\frac{u_3}{v_3}\cdot\ldots\ldots$$

$$=1+\cfrac{\frac{u_1-v_1}{v_1}}{-\cfrac{(u_2-v_2)u_1v_1}{u_1u_2-v_1v_2-\cfrac{(u_1-v_1)(u_3-v_3)u_2v_2}{u_2u_3-v_2v_3-\cfrac{(u_2-v_2)(u_4-v_4)u_3v_3}{u_3u_4-v_3v_4-\ddots}}}}$$

oder, da $1+\frac{u_1-v_1}{v_1-x}=\cfrac{1}{1-\cfrac{u_1-v_1}{u_1-x}}$ ist, auch

$$\frac{u_1}{v_1}\cdot\frac{u_2}{v_2}\cdot\frac{u_3}{v_3}\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{u_1-v_1}{u_1-\cfrac{(u_2-v_2)u_1v_1}{u_1u_2-v_1v_2-\ddots}}}$$

Soll z. B. nach Formel 57) das in §. 135 betrachtete Produkt

$$(1-\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{5})\ldots=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\ldots$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden, so setze man $u_1=2$, $v_1=3$, $u_2=4$, $v_2=3$ u. s. w. und erhält demnach $u_ku_{k+1}-v_kv_{k+1}=\pm 1$, und $u_k-v_k=\pm 1$ wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt vermittelst einfacher Reduktion

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdot = 1 - \cfrac{1}{3+\cfrac{2.3}{1+\cfrac{3.4}{1+\cfrac{4.5}{1+\ddots}}}}$$

also

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdot = 2 - \cfrac{2}{3+\cfrac{2.3}{1+\cfrac{3.4}{1+\cfrac{4.5}{1+\ddots}}}}$$

Man hat aber allgemein $a - \frac{b}{c+x} = a - 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{b}{c-b+x}}$

also auch $2 - \frac{2}{3+x} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+x}}$

wodurch die letzte Formel in

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdot = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1.2}{1+\cfrac{2.3}{1+\cfrac{3.4}{1+\cfrac{4.5}{1+\ddots}}}}} \text{ *)}$$

übergeht.

*) Dass dieses unendliche Produkt $= \frac{\pi}{2}$ ist, findet man in Note VI Formel 24).

## Note I.

### Ueber die Entwickelung des Polynoms, wenn der Exponent keine ganze positive Zahl ist.

1.

Wenn die Reihe $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, so ist, wenn $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet (§. 56),

$$1) \quad (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m = 1 + A_1 x + \ldots + A_r x^r + \ldots$$

und zwar bestimmt man $A_r$ auf independentem Wege durch die Formel

$$2) \qquad A_r = {}^r\overset{m}{C}p$$

wo sich die Combinationen auf die Elemente $a_0, a_1 \ldots$ beziehen, indem man die Einheit als das Element $a_0$ ansieht. Die rekurrirende Formel dagegen heisst

$$3) \quad A_r = \frac{[m+1-r]a_1 A_{r-1} + [2(m+1)-r]a_2 A_{r-2} \ldots + [r(m+1)-r]a_r}{r}$$

(Kap. 5 §. 30 u. §. 32.)

Es frägt sich nun, unter welchen Umständen die Reihe 1) ihre Geltung behält, wenn $m$ keine ganze positive Zahl ist, und wie man dann $A_r$ independent oder rekurrirend finden kann. Es ist klar, dass die durch Formel 2) ausgedrückte independente Bestimmung nicht mehr brauchbar ist, sobald $m$ keine ganze positive Zahl ist, da das Symbol ${}^r\overset{m}{C}$ dann, wenigstens nach unserer Definition der Combinationen $m$ter Klasse, keinen Sinn mehr hat. Die Recursionsformel 3) dagegen behält für jeden Werth von $m$ einen bestimmten Sinn. Es entsteht daher die Frage, welche independente Formel statt 2) anzuwenden ist, wenn $m$ keine ganze positive Zahl ist, und

ob in diesem Falle noch immer die Formel 3) zur rekurrirenden Bestimmung gebraucht werden darf.

2.

Nimmt man an, dass nicht blos die Reihe $1+a_1x+a_2x^2+\ldots$ convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, sondern dass zugleich $a_1x+a_2x^2+\ldots$ kleiner als die Einheit ist, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, so setze man $a_1x+a_2x^2+\ldots=y$. Man hat daher für jedes reelle $m$ (§. 57)

$$(1+a_1x^1+a_2x^2+\ldots)^m=(1+y)^m=1+{}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}y+{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}y^2+\ldots+{}^m\overset{r}{\mathfrak{B}}y^r+\ldots$$

Nun ist (§. 31), wenn $k$ eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$y^k=x^k(a_1+a_2x+\ldots)^k \ddagger {}^k\overset{k}{C}px^k+{}^{k+1}\overset{k}{C}px^{k+1}+\ldots+{}^{k+r}\overset{k}{C}px^{k+r}+\ldots$$

also da man, bei unserer Voraussetzung, das Gleichheitszeichen brauchen darf,

$$4)\qquad y^k={}^k\overset{k}{C}px^k+{}^{k+1}\overset{k}{C}px^{k+1}+\ldots+{}^{k+r}\overset{k}{C}px^{k+r}+\ldots\ldots$$

wo sich die Combinationen auf die Elemente $a_1$, $a_2\ldots$ beziehen. Schreibt man daher ${}^1\overset{1}{C}p$ statt $a_1$, ${}^2\overset{1}{C}p$ statt $a_2$, allgemein ${}^r\overset{1}{C}p$ statt $a_r$ so ist $y={}^1\overset{1}{C}px+{}^2\overset{1}{C}px^2+\ldots\ldots$ und demnach

$$\begin{aligned}1+{}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}y+{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}y^2+\ldots=1&+{}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^1\overset{1}{C}px+{}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^2\overset{1}{C}px^2+\ldots+{}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{1}{C}px^r+\ldots\\&+{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}\,{}^2\overset{2}{C}px^2+\ldots+{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{2}{C}px^r+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+{}^m\overset{r}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{r}{C}px^r+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Da nun, nach unserer Voraussetzung, die Reihe 4) convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, so haben wir nun als Werth von $(1+y)^m$ eine Doppelreihe, bei der nicht blos jede einzelne Horizontalreihe, sondern auch deren Summe convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt. Man erhält demnach denselben Werth wenn man die Verticalreihen addirt. Setzt man also

$$5)\qquad A_r={}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{1}{C}p+{}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{2}{C}p+\ldots+{}^m\overset{r}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{r}{C}p=\sum_{1,r}{}^m\overset{k}{\mathfrak{B}}\,{}^r\overset{k}{C}p$$

so ist für jedes reelle $m$, sobald $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, kleiner als die Einheit ist,

6) $$(1+a_1x+..+a_rx^r+\ldots)^m = 1+A_1x+A_2x^2+..+A_rx^r+\ldots$$

übereinstimmend mit 1) nur dass nun $A_r$ durch 5) zu bestimmen ist. Für ein ganzes positives $m$ hat man demnach zwei verschiedene independente Bestimmungen, die durch 2) und 5) dargestellt werden.

3.

Wenn man in Formel 6) auf beiden Seiten mit $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$ multiplicirt, so erhält man

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots.)^{m+1} = (1 + A_1x + A_2x^2+..+A_rx^r+\ldots)$$
$$(1 + a_1 x + a_2x^2 + .. + a_r x^r + \ldots)$$

und demnach, wenn man

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^{m+1} = 1 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_rx^r + \ldots.$$

setzt,

7) $$B_r = A_r + a_1 A_{r-1} + a_2 A_{r-2} + \ldots + a_r$$

Andererseits ist nach Form. 5)

$$B_r = \sum_{1,r}^{k} {}^{m+1}\overset{k}{\mathfrak{B}}\; {}^r\overset{k}{Cp}$$

Nun ist (§. 18 Form. 12)

$${}^r\overset{k}{Cp} = \frac{k}{r}[a_1{}^{r-1}\overset{k-1}{Cp} + 2a_2{}^{r-2}\overset{k-1}{Cp} + \ldots. + (r+1-k)a_{r+1-k}\;{}^{k-1}\overset{k-1}{Cp}]$$

Setzt man in dieser Formel statt $k$ allmälich alle Werthe von 1 bis $r$, nachdem man auf beiden Seiten mit ${}^{m+1}\overset{k}{\mathfrak{B}}$ multiplicirt hat, so findet man

$${}^{m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\;{}^r\overset{1}{Cp} = \frac{1}{r}\,{}^{m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,ra_r$$

$${}^{m+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}\;{}^r\overset{2}{Cp} = \frac{2}{r}\,{}^{m+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(a_1.{}^{r-1}\overset{1}{Cp} + 2a_2.{}^{r-2}\overset{1}{Cp} + \ldots. + (r-1)a_{r-1}.{}^1\overset{1}{Cp})$$

$${}^{m+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\;{}^r\overset{3}{Cp} = \frac{3}{r}\,{}^{m+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}(a_1.{}^{r-1}\overset{2}{Cp} + 2a_2.{}^{r-2}\overset{2}{Cp} + \ldots. + (r-2)a_{r-2}.{}^2\overset{2}{Cp})$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$${}^{m+1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,{}^{r}\overset{r-1}{Cp} = \frac{r-1}{r}\,{}^{m+1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,(a_1\,.\,{}^{r-1}\overset{r-2}{Cp} + 2a_2\,.\,{}^{r-2}\overset{r-2}{Cp})$$

$${}^{m+1}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,{}^{r}\overset{r}{Cp} = \frac{r}{r}\,{}^{m+1}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,.\,a_1\,{}^{r-1}\overset{r-1}{Cp}$$

Setzt man ferner in diesen Ausdrücken

$${}^{m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} = m+1$$

$${}^{m+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{m+1}{2}\,{}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$${}^{m+1}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{m+1}{r}\,{}^{m}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$$

so findet man

$$B_r = \frac{m+1}{r}\,r a_r$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,{}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}[a_1\,{}^{r-1}\overset{1}{Cp} + 2a_2\,{}^{r-2}\overset{1}{Cp} \ldots + (r-1)a_{r-1}\,{}^{1}\overset{1}{Cp}]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,{}^{m}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}[a_1\,{}^{r-1}\overset{r-2}{Cp} + 2a_2\,{}^{r-2}\overset{r-2}{Cp}]$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,{}^{m}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,a_1\,{}^{r-1}\overset{r-1}{Cp}$$

oder

$$B_r = \frac{m+1}{r}\,a_1\,[{}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{r-1}\overset{1}{Cp} + \ldots\ldots + {}^{m}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,{}^{r-1}\overset{r-1}{Cp}]$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,.\,2a_2\,[{}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{r-2}\overset{1}{Cp} + \ldots + {}^{m}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}\,{}^{r-2}\overset{r-2}{Cp}]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,{}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,(r-1)\,a_{r-1}\,{}^{1}\overset{1}{Cp}$$

$$+ \frac{m+1}{r}\,r a_r$$

Berücksichtigt man aber die Formel 5) so sieht man, dass man statt dieses Ausdrucks auch schreiben kann

$$B_r = \frac{m+1}{r}\,[a_1 A_{r-1} + 2a_2 A_{r-2} + \ldots + (r-1)a_{r-1} A_1 + r a_r],$$

also nach Formel 7)

$$A_r + a_1 A_{r-1} + \dots + a_{r-1} A_1 + a_r = \frac{m+1}{r}[a_1 A_{r-1} + 2a_2 A_{r-2} \dots + (r-1)\, a_{r-1} A_1 + r a_r]$$

übereinstimmend mit Formel 3), womit also die Gültigkeit dieser Recursionsformel für jedes reelle $m$ nachgewiesen ist, sobald die Reihe $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ den gestellten Bedingungen entspricht.

## Note II.
### Zu §. 44.

#### 1.

Wenn eine Reihe mit nur positiven Gliedern, die nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen, convergirt, so wird sie auch noch convergiren, wenn man die Glieder in einer anderen Ordnung auf einander folgen lässt, und auch denselben Werth behalten. Insofern man nemlich in diesem Falle, je mehr Glieder der gegebenen Reihe man addirt, sich desto mehr einem bestimmten Werthe nähert, ist es ganz gleichgültig, in welcher Ordnung diese Addition ausgeführt wird. Anders aber ist es, wenn die convergirende Reihe, von welcher man ausgeht, positive und negative Glieder enthält. Behält man alsdann dieselben und mit denselben Zeichen versehenen Glieder bei, lässt sie aber in einer anderen Ordnung aufeinander folgen, so kann es seyn, dass die hierdurch entstehende neue Reihe zwar ebenfalls convergirt, jedoch einen anderen Werth als die ursprüngliche hat, oder sie kann auch divergiren. Es wurde z. B. in §. 59 nachgewiesen, dass die Reihe

$$1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \dots + \frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r} + \dots$$

convergirt. Hier sind die Glieder positiv oder negativ, je nachdem der Nenner eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, und so geordnet, dass auf jedes Glied mit dem ungeraden Nenner $2r-1$ das Glied mit dem geraden Nenner $2r$ folgt. Man bilde nun aus denselben Gliedern eine neue Reihe, dadurch, dass man die ungeraden Glieder in derselben Ordnung wie früher aufeinander folgen lässt, während zugleich nach je

zwei Gliedern mit ungeradem Nenner ein Glied mit geradem Nenner folgt, so erhält man die Reihe

2) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{2r}+\ldots$

welche ebenfalls convergiren, aber einen anderen Werth als die Reihe 1) haben wird. Ist nemlich $W$ der Werth der ersten Reihe, also

$$W = lim\,(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r})$$

so ist $lim\,(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{2r})$

$$= lim\,(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r})$$

$$+lim(\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}\ldots+\frac{1}{4r-1})=W+lim(\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}\ldots+\frac{1}{4r-1}).$$

Die Reihe $\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}\ldots+\frac{1}{4r-1}$ enthält aber $r$ Glieder, und ihr Werth ist mithin immer zwischen den Grenzen $r\,.\,\frac{1}{4r-1}$ und $r\,.\,\frac{1}{2r+1}$ und um so mehr zwischen den Grenzen $r\,.\,\frac{1}{4r}=\frac{1}{4}$ und $r\,.\,\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}$ eingeschlossen. Setzt man daher

$$lim\,(\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}\ldots+\frac{1}{4r-1})=k$$

so dass $k$ eine zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegende Zahl bedeutet, so folgt

$$lim\,(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1}-\frac{1}{2r}) = W+k$$

Man sieht aber sofort, dass man dasselbe Resultat erhält, wenn man nicht bei dem Gliede $-\frac{1}{2r}$ stehen bleibt, sondern $lim\,(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{4r-3}+\frac{1}{4r-1})$ oder $lim\,(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{4r-3})$ betrachtet, woraus sich er-

giebt dass die Reihe 2) eine convergirende ist und den Werth $W + k$ hat.

Aus §. 59 folgt, dass auch die Reihe

$$3) \quad 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \ldots + \frac{1}{(2r-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots$$

convergirt, ihr Werth sey $W$. Man ändere nun wieder die Ordnung der Glieder, wie oben, so erhält man die Reihe

$$4) \quad 1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(4r-3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}}$$

welche aber divergiren wird. Denn es ist

$$1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \ldots + \frac{1}{(4r-3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \ldots + \frac{1}{(2r-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{(2r+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2r+3)^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Nun ist aber $\frac{1}{(2r+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2r+3)^{\frac{1}{2}}} \ldots + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}} > r \cdot \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}}$

also umsomehr $> r \cdot \frac{1}{(4r)^{\frac{1}{2}}}$ d. h. $> \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2}$. Diese Summe wächst demnach mit $r$ über jede angebbare Grenze und mithin da

$$\lim\left(1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \ldots + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}}\right) = W + \lim\left[\frac{1}{(2r+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2r+3)^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(4r-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

so muss die Reihe 4) divergiren.

## 2.

Zwei Reihen, welche dieselben, aber in verschiedener Ordnung aufeinander folgenden Glieder enthalten, haben denselben Werth, wenn sie, indem man alle Glieder positiv nimmt, in eine convergirende Reihe übergehen, bei welcher daher der Werth von der Ordnung der Glieder unabhängig ist.

Denn man habe eine convergirende Reihe mit nur posi-

tiven Gliedern, welche die Reihe $A$) heisse. Aus dieser bilde man, indem man einzelne Glieder negativ nimmt, die Reihe $B$). Aus der Reihe $B$) bilde man die Reihe $C$), indem man die Ordnung der Glieder, nach irgend einem Gesetze, ändert. Es wird jedoch hierbei vorausgesetzt, dass in der Reihe $C$), wie in der Reihe $B$), die Glieder, welche einen endlichen Werth haben, sich in einer endlichen Entfernung vom Anfangsgliede befinden. Die Reihen $B$) und $C$) sind convergirende Reihen, da selbst, wenn alle Glieder positiv genommen werden, nach der Voraussetzung, eine convergirende Reihe entsteht (vgl. §. 49). Hat die Reihe $A$) den Werth $W$, so heisst dies, die Summe ihrer $r$ ersten Glieder nähert sich, bei unbegrenzt wachsendem $r$, unbegrenzt diesem Werthe, während zugleich die Summe jeder beliebigen Anzahl darauf folgender Glieder, welche $R$ heissen mag, unbegrenzt klein wird. Die Reihe $B$) habe den Werth $W'$, so dass die Summe ihrer $r$ ersten Glieder (welche, abgesehen vom Zeichen, mit den $r$ ersten Gliedern der Reihe $A$) übereinstimmen) sich mit unbegrenzt wachsendem $r$ unbegrenzt diesem Werthe nähert. Nun kann man die Reihe $C$) immer so weit entwickeln, dass unter ihren $r+k$ ersten Gliedern die $r$ ersten Glieder der Reihe $B$) enthalten sind. Hätte nun die Reihe $C$) einen von $W'$ verschiedenen Werth, welcher $W'+h$ heissen mag, so würde die Summe ihrer $r+k$ ersten Glieder, bei unbegrenzt wachsendem $r$, sich diesem Werthe unbegrenzt nähern müssen. Allein die Summe der $r$ Glieder, welche mit den $r$ ersten Gliedern der Reihe $B$) übereinstimmen, nähert sich dem Werthe $W'$; die Summe der $k$ übrigen Glieder muss sich also der Grenze $h$ nähern. Aber selbst, wenn alle $k$ Glieder das positive Zeichen haben, so kann ihre Summe immer als ein Theil von $R$ angesehen werden, und da $R$ bei unbegrenzt wachsendem $r$, unbegrenzt kleiner wird, so muss dies um so mehr bei der Summe dieser $k$ Glieder der Fall seyn. Demnach muss $h=0$ seyn, und die Reihen $B$) und $C$) haben denselben Werth.

3.

Wird die convergirende Reihe, von welcher man ausgeht, divergent, wenn man alle Glieder positiv nimmt, so müssen

unter einer unbegrenzten Zahl ihrer ersten Glieder auch unbegrenzt viel positive und unbegrenzt viel negative vorkommen. Wäre die Anzahl der positiven oder der negativen Glieder begrenzt, so könnte man dieselben ganz vernachlässigen und die Reihe müsste divergiren. Bildet man aus dieser Reihe eine andere, durch Veränderung der Ordnung der Glieder, so kann man voraussetzen, dass in der neuen Reihe, wie in der ursprünglichen, die Glieder, welche einen endlichen Werth haben, sich in einem endlichen Abstande vom Anfangsgliede befinden. Man setze ferner voraus, dass die Ordnung, in welcher die positiven Glieder auf einander folgen, so wie die Ordnung, in welcher die negativen Glieder auf einander folgen, dieselbe bleibt.

Man nenne die Reihe, von welcher man ausgeht, die Reihe $A$), die aus ihr, durch Versetzung der Glieder, gebildete, die Reihe $B$).

Man wird den Anfang der Entwickelung der Reihe $B$) immer so weit fortführen können, dass darin alle negativen Glieder, welche unter den $k$ ersten Gliedern der Reihe $A$) vorkommen, und keine anderen negativen Glieder, enthalten sind; seyen hierzu $k \pm l$ Gliedern der Reihe $B$) nöthig. Man bezeichne die Summe der $k$ ersten Glieder der Reihe $A$) durch $A_k$, die Summe der $k \pm l$ ersten Glieder der Reihe $B$) durch $B_{k \pm l}$. Die Ausdrücke $A_k$ und $B_{k \pm l}$ werden sich also nur dadurch von einander unterscheiden, dass der eine derselben eine Anzahl positiver Glieder enthält, welche in dem anderen fehlen. Nennt man die Summe dieser positiven Glieder $P_k$ so hat man mithin

$$B_{k \pm l} = A_k \pm P_k$$

Lässt man nun $k$ unbegrenzt wachsen, so sind mithin drei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $\lim P_k = 0$, so ist $\lim B_{k \pm l} = \lim A_k$, dann haben die Reihen $A$) und $B$) gleichen Werth.

2. Ist $\lim P_k$ ein endlicher von Null verschiedener Werth, so ist

$$\lim B_{k+l} = \lim A_k \pm \lim P_k$$

die Reihe $B$) convergirt also, hat aber einen anderen Werth als die Reihe $A$).

3. Wächst $P_k$ mit $k$ über jede angebbare Grenze, so divergirt die Reihe $B$).

Der zweite und dritte Fall sind schon oben durch Beispiele erläutert worden. Ein Beispiel des ersten Falles bietet die Reihe

$$5) \qquad -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r-1} \ldots\ldots$$

im Verhältniss zur Reihe 1). Nennt man letztere die Reihe $A$) und setzt $k = 2r$ so ist $A_k = 1 - \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r}$

$$B_{k+l} = -\frac{1}{2} + 1 \ldots\ldots + \frac{1}{2r-3} - \frac{1}{2r}$$

also $P_k = -\frac{1}{2r-1}$ und $\lim P_k = 0$. Hätte man $B_{k+l} = -\frac{1}{2} + 1 \ldots + \frac{1}{2r-3} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r-1}$ gesetzt, so hätte man sogleich $P_k = 0$ gefunden.

## Note III.

### Zu §. 76.

In diesem §. wurde nachgewiesen, dass es keine irgendwie aus $r$ zusammengesetzte Grösse $t_r$ giebt, so beschaffen, dass die nur positive Glieder enthaltende Reihe, deren allgemeines Glied $v_r$ ist, convergirt oder divergirt je nachdem $\lim\ [t_r v_r] = 0$ oder $> 0$ ist. Wohl aber kann man zeigen, dass diese Reihe immer convergirt, wenn zu der Bedingung $\lim\ [t_r v_r] = 0$ noch eine bestimmte andere hinzukommt. Sey $t_r$ eine beliebige aus $r$ zusammengesetzte Grösse, welche positiv ist, und $a$ irgend eine bestimmte positive Grösse, so hat man die identische Gleichung

$$v_{r+1}+v_{r+2}\ldots+v_{r+k}=\frac{t_r v_r}{a}-\frac{t_r v_r}{a}+v_{r+1}$$
$$+\frac{t_{r+1}v_{r+1}}{a}-\frac{t_{r+1}v_{r+1}}{a}+v_{r+2}$$
$$+\frac{t_{r+2}v_{r+2}}{a}-\frac{t_{r+2}v_{r+2}}{a}+v_{r+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{t_{r+k-1}v_{r+k-1}}{a}-\frac{t_{r+k-1}v_{r+k-1}}{a}+v_{r+k}$$

Sey nun allgemein

$$\frac{t_k v_k}{a}-\frac{t_{k+1}v_{k+1}}{a}-v_{k+1}=u_k$$

so folgt

$$v_{r+1}+v_{r+2}+\ldots+v_{r+k}=\frac{t_r v_r}{a}-(u_r+u_{r+1}\ldots+u_{r+k-1})-\frac{t_{r+k}v_{r+k}}{a}$$

Ist nun $lim\,[t_r v_r]=0$ und sind zugleich die Grössen $u_r$, $u_{r+1}\ldots$ positiv oder Null, so ist

$$v_{r+1}+v_{r+2}+\ldots+v_{r+k}<\frac{t_r v_r}{a}$$

die Reihe

1) $\qquad v_1+v_2+\ldots$

wird also convergiren, wenn $lim\left[\frac{t_r v_r}{a}\right]=0$ und zugleich $lim\, u_r \geqq 0$. Da nun $lim\,[t_r v_r]=0$ vorausgesetzt wird, so ist die Bedingung $lim\left[\frac{t_r v_r}{a}\right]=0$ von selbst erfüllt, da $a$ positiv (also nicht $=0$) ist. Die Bedingung $lim\, u_r \geqq 0$ führt auf

$$lim\left[\frac{t_r v_r}{a}-\frac{t_{r+1}v_{r+1}}{a}-v_{r+1}\right]\geqq 0 \text{ oder } lim\left[\frac{t_r v_r}{(v_{r+1})a}-\frac{t_{r+1}}{a}\right]\geqq 1$$

d. h.

$$lim\left[\frac{t_r v_r}{v_{r+1}}-t_{r+1}\right]\geqq a$$

Man hat mithin den Satz:

Wenn $v_r$ das allgemeine Glied einer Reihe mit nur posi-

tiven Gliedern ist, und sich ein die Grösse $r$ enthaltender positiver Ausdruck $t_r$ finden lässt, so beschaffen, dass $\lim t_r v_r = 0$ und zugleich $\lim \left[\frac{t_r v_r}{v_{r+1}} - t_{r+1}\right] > 0$ so convergirt die Reihe.

Dies ist z. B. nicht der Fall bei der Reihe

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots.$$

wenn man $t_r = r$ setzt. Denn nun ist zwar $\lim [t_r v_r] = 0$, aber

$$\frac{t_r v_r}{v_{r+1}} - t_{r+1} = (r+1)\frac{\log(r+1)}{\log r} - (r+1)$$

also, da sich $\frac{\log(r+1)}{\log r}$ mit unbegrenzt wachsendem $r$ unbegrenzt der Einheit nähert,

$$\lim \left[\frac{t_r v_r}{v_{r+1}} - t_{r+1}\right] = 0$$

Setzt man $\frac{t_r v_r}{v_{r+1}} - t_{r+1} = m_r$

also $\quad t_r v_r - t_{r+1} v_{r+1} = m_r v_{r+1}$

so ist $\quad t_{r+1} v_{r+1} - t_{r+2} v_{r+2} = m_{r+1} v_{r+2}$

u. s. w.

mithin

$$t_r v_r = m_r v_{r+1} + m_{r+1} v_{r+2} + m_{r+2} v_{r+3} + \ldots.$$

$$\frac{t_r v_r}{m_r} = v_{r+1} + \frac{m_{r+1}}{m_r} v_{r+2} + \frac{m_{r+2}}{m_r} v_{r+3} + \ldots.$$

Nimmt nun $m_r$ mit wachsendem $r$ ab, so sind die Grössen $\frac{m_{r+1}}{m_r}, \frac{m_{r+2}}{m_r} \ldots$ ächte Brüche, mithin

$$\frac{t_r v_r}{m_r} < v_{r+1} + v_{r+2} + v_{r+3} + \ldots.$$

Ist daher $\lim \left[\frac{t_r v_r}{m_r}\right] > 0$ so kann nicht $\lim (v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots) = 0$ seyn, d. h. die Reihe 1) muss dann divergiren. Setzt

man zur Abkürzung $\frac{t_r v_r}{m_r} = n_r$ so hat man mithin den Satz:

Wenn $\lim[t_r v_r] = 0$, $\lim m_r = 0$ zugleich aber $\lim n_r > 0$ so divergirt die Reihe 1). Bei der Reihe

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots$$

ist, wenn man $t_r = r$ setzt, $\lim [t_r v_r] = 0$, $\lim m_r = 0$ aber

$$n_r = \frac{1}{\log r} \cdot \frac{\log r}{(r+1)\,[\log (r+1) - \log r]} = \frac{1}{(r+1) \log (1 + \frac{1}{r})}$$

$$= \frac{1}{\log\, [(1 + \frac{1}{r})]^{(r+1)}}.$$ Nun ist $\lim\, [(1 + \frac{1}{r})^{r+1}]$

$= \lim[(1 + \frac{1}{r})^r \cdot (1 + \frac{1}{r})] = e$ (§. 79), also $\lim n_r = \frac{1}{\log e} > 0$, mithin die Reihe divergent.

Hat man eine Grösse $t_r$ gefunden, für welche $\lim[t_r v_r] = 0$ so muss jedenfalls eine der zwei Grössen $m_r$ und $n_r$ Null werden, da $t_r v_r = m_r n_r$. Nun lässt sich aber wirklich für jede Reihe eine Grösse $t_r$ finden, so beschaffen, dass $\lim[t_r v_r] = 0$ während zugleich eine der zwei Funktionen $m_r$ und $n_r$ grösser als Null ist. Dann wird also die Reihe convergiren oder divergiren je nachdem $\lim n_r = 0$ oder $\lim m_r = 0$. Hat man nemlich eine convergirende Reihe, so kann man

$t_r = \frac{v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots}{v_r}$ setzen, dann ist $\lim\, [t_r v_r] = 0$

$$m_r = \frac{v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots}{v_{r+1}} - \frac{v_{r+2} + v_{r+3} + \ldots}{v_{r+1}} = 1,$$

$\lim n_r = 0$. Ist dagegen die Reihe divergent, so setze man

$t_r = \frac{1}{v_r (v_1 + v_2 + \ldots + v_r)}$, dann ist wieder $\lim t_r v_r = 0$

$m_r = 0$ also $\lim n_r = \infty$.

Diese Betrachtung hat indessen nur insofern Werth, als sie die Möglichkeit zeigt, in jedem Falle eine Funktion $t_r$ zu finden, welche den geforderten Bedingungen genügt. Zur Beurtheilung der Beschaffenheit einer vorgelegten Reihe ist jedoch dieser Werth von $t_r$ nicht anwendbar, da er das, was

man finden will, bereits als bekannt voraussetzt, nemlich ob die Reihe convergirt oder divergirt.

## Note IV.
## Zu §. 80.

Man kann auf ähnliche Weise auch darthun, dass $e$ nicht die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten seyn kann. Wäre es nemlich möglich dass die Gleichung

$$1) \qquad ae^2 + be + c = 0$$

statt fände, so dass $a$, $b$, $c$, rationale Zahlen bedeuten, so könnte man immer voraussetzen, dass $a$, $b$, $c$ ganze Zahlen sind, da man ja im entgegengesetzten Falle erst die Brüche wegschaffen könnte, auch kann man $a$ positiv nehmen. Nun folgt aus 1)

$$ae + ce^{-1} = -b$$

und hieraus, wenn man statt $e$ und $e^{-1}$ ihre Werthe setzt,

$$-b = a\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} \ldots + \frac{1}{1.2\ldots q}\right) + \frac{a}{1.2\ldots q}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\right)$$
$$+ c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1.2.3} \ldots \pm \frac{1}{1.2\ldots q}\right) \mp \frac{c}{1.2\ldots q}\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\right)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $1.2\ldots q$ und setzt

$$a\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\right) \mp c\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\right) = g$$

so müsste mithin $g$ eine ganze Zahl (oder Null) seyn. In diesem Ausdrucke ist aber $-c$ oder $c$ zu nehmen, je nachdem $q$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Je nachdem $c$ positiv oder negativ ist, nehme man daher für $q$ eine ungerade oder eine gerade Zahl, so wird der Ausdruck $\mp c$ jedenfalls positiv seyn. Nun ist der Werth der Reihe

$$2) \qquad \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\ldots$$

positiv und kleiner als $\frac{1}{q}$ (§. 80) und dasselbe gilt (§. 59) von der Reihe

$$3) \qquad \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

Demnach ist $g < \frac{a \mp c}{q}$. Andererseits ist der Werth der Reihe 2) grösser als $\frac{1}{q+1}$ also auch $g > \frac{a}{q+1}$. Daher kann $g$ nicht Null seyn. Da nun $q$ willkührlich ist, so kann man immer $q > a \mp c$ nehmen, alsdann kann aber $g$ keine ganze Zahl seyn. Mithin kann auch die Gleichung 1) nicht statt haben.

Dieser Beweis gilt auch noch in dem Falle wenn $b = 0$ ist, d. h. es kann auch die Gleichung

$$ae^2 + c = 0$$

nicht statt finden, oder auch das Quadrat der Zahl $e$ ist irrational.

## Note V.
### Zu §§. 122 bis 125.

1.

Die Formeln 35 bis 42 kann man durch folgende einfache Betrachtungen erhalten.

Es ist

$$x^n + \frac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})(x + \frac{1}{x}) - (x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}})$$

oder, wenn man $x + \frac{1}{x} = u$ setzt,

$$1) \qquad x^n + \frac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})\,u - (x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}})$$

also, wenn $n = 2$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$$

wenn $n = 3$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x^2 + \frac{1}{x^2})\,u - u = u^3 - 3u$$

wenn $n = 4$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^3 + \frac{1}{x^3})\,u - (x^2 + \frac{1}{x^2}) = u^4 - 4u^2 + 2$$

Setzt man diese Betrachtungen fort, so findet man

$$2)\quad x^n+\frac{1}{x^n}=u^n-nu^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}u^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}u^{n-6}+\ldots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\text{A)}\qquad \pm\frac{n(n-r-1)\,(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}u^{n-2r}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $r$ gerade oder ungerade.

Die allgemeine Richtigkeit dieser Formel ist leicht nachzuweisen. Das Vorhergehende zeigt, dass sie bis $n=4$ richtig ist. Man nehme an, sie sey bis zu irgend einem Werthe von $n$ richtig. Setzt man $n+1$ statt $n$, so wird man, nach Formel 1), in der Entwickelung von $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ das Glied, welches die Potenz $u^{n-2r+1}$ enthält, finden, indem man das Glied in der Entwickelung von $x^n+\frac{1}{x^n}$, welches die Potenz $u^{n-2r}$ enthält, mit $u$ multiplicirt, was $\pm\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}u^{n-2r+1}$ giebt, und hiervon das Glied der Entwickelung von $x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$ welches die Potenz $u^{n-2r+1}=u^{n-1-2(r-1)}$ enthält, abzieht. Um aber diesen letzteren Ausdruck zu finden, hat man in dem allgemeinen Gliede A) statt $n$ nun $n-1$ und $r-1$ statt $r$ zu setzen; dies giebt

$$\mp\frac{(n-1)\,(n-r-1)\ldots(n-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r-1)}u^{n-2r+1}$$

der gesuchte Ausdruck wird also

$$\pm\left[\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}+\frac{(n-1)(n-r-1\ldots(n-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r-1)}\right]u^{n-2r+1}$$

$$=\pm\frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(r-1)}\left[\frac{n(n-2r+1)}{r}+n-1\right]u^{n-2r+1}$$

$$=\pm\frac{(n+1)\,(n-r)\,(n-r-1)\ldots(n-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}u^{n+1-2r}$$

der Satz gilt demnach für $n+1$ wenn er für $n$ gilt und ist mithin allgemein richtig.

2.

Setzt man $x = \cos a + \sin a . i$ also $\frac{1}{x} = \cos a - \sin a . i$ so ist $x + \frac{1}{x} = 2 \cos a = u$, $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos na$. Die Formel 2) verwandelt sich alsdann in

$$3) \quad 2 \cos na = 2^n (\cos a)^n - n . 2^{n-2} (\cos a)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 . 2} 2^{n-4} (\cos a)^{n-4} \ldots$$
$$\pm \frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1 . 2 . . . r} 2^{n-2r} (\cos a)^{n-2r} \pm$$

Ist $n$ gerade $= 2r$ so schliesst dieser Ausdruck mit $\pm \frac{2r . (r-1) \ldots . 1}{1 . 2 . . . r} = \pm 2$, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $r$ gerade oder ungerade, d. h. je nachdem $n = 4k$ oder $= 4k + 2$.

Ist $n$ ungerade $= 2r + 1$ so schliesst die Reihe mit $\pm \frac{(2r+1) r . (r-1) \ldots . 2}{1 . 2 . . . . r} 2 \cos a = \pm 2n \cos a$. Setzt man aber in dem allgemeinen Gliede $r - k$ statt $r$, so geht es, wenn $n = 2r$ in

$$B) \quad \pm \frac{2r(r+k-1) \ldots . (2k+1)}{1 . 2 \ldots . (r-k)} 2^2 (\cos a)^{2k}$$
$$= \pm \frac{2r(r+k-1)(r+k-2)\ldots(r-k+2)(r-k+1)}{1 . 2 . . . . . 2k} 2^{2k} (\cos a)^{2k}$$
$$= \pm \frac{2r [r^2 - (k-1)^2] [r^2 - (k-2)^2] \ldots r}{1 . 2 . . . 2k} 2^{2k} (\cos a)^{2k}$$ über.

Setzt man $r = \frac{n}{2}$ also $r^2 = \frac{n^2}{4}$ so kann man statt $r^2 - (k-1)^2$ auch $\frac{n^2 - (2k-2)^2}{2^2}$ schreiben, statt $r^2 - (k-2)^2$ auch $\frac{n^2 - (2k-4)^2}{2^2}$ u. s. w. Schreibt man noch $\frac{n^2}{2}$ statt $2r^2$ so geht $B)$ in

$$\pm \frac{\frac{n^2}{2} \cdot \frac{n^2 - 2^2}{2^2} \ldots . \frac{n^2 - (2k-2)^2}{2^2}}{1 . 2 . . . . . 2k} 2^{2k} (\cos a)^{2k}$$
$$= \pm \frac{2n^2 (n^2 - 2^2) \ldots (n^2 - (2k-2)^2)}{1 . 2 . . . 2k} (\cos a)^{2k}$$

über. Dividirt man nun in Formel 3) alle Glieder mit 2 und beginnt mit dem letzten Gliede, so sieht man, dass die Entwickelung von $\pm$ *cos na* mit 1 beginnt und das allgemeine Glied $\pm \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2k-2)^2)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;2k}(\cos a)^{2k}$ ist, übereinstimmend mit Formel 39) des §. 125., aus welcher dann Formel 35) des §. 122 folgt.

Ist $n = 2r + 1$ und man setzt wieder $r - k$ statt $r$ in dem allgemeinen Gliede, so wird dieses

$$\pm \frac{(2r+1)(r+k)\ldots(2k+2)}{1\;.\;2\;\ldots\;(r-k)}\, 2^{2k+1}(\cos a)^{2k+1}$$

$$= \pm \frac{(2r+1)(r-k+1)\ldots\ldots(r+k)}{1\;.\;2\;\ldots\;2k+1)}\, 2^{2k+1}(\cos a)^{2k+1}$$

Nun ist $r = \frac{n-1}{2}$, $r+k = \frac{n+2k-1}{2}$, $r-k+1 = \frac{n-2k+1}{2}$

also $(r-k+1)(r+k) = \frac{n^2-(2k-1)^2}{2^2}$ und demnach das allgemeine Glied

$$\pm \frac{n.(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots n^2-(2k-1)^2}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;2k+1}\, 2\,(\cos a)^{2k}$$

übereinstimmend mit Formel 42) des §. 125, aus welcher Formel 38) des §. 124 folgt. Uebrigens könnte man die Formeln 35) und 38) auch direkt aus Formel 2) dieser Note ableiten, indem man $-x$ statt $x$ setzt. Denn je nachdem $n = 2r$ oder $= 2r + 1$ erhielte man hiernach

$$x^{2r} + \frac{1}{x^{2r}} = (x - \frac{1}{x})^{2r} - 2r\,(x - \frac{1}{x})^{2r-2} + \ldots\ldots$$

$$x^{2r+1} - \frac{1}{x^{2r+1}} = (x - \frac{1}{x})^{2r+1} - (2r+1)\,(x - \frac{1}{x})^{2r-1} + \ldots\ldots$$

und hieraus, wenn man wieder $x = \cos a + \sin a.i$ setzt, die erwähnten Formeln.

3.

Aus

$$x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^{2m-1} + \frac{1}{x^{2m-1}}) - (x^{2m-3} + \frac{1}{x^{2m-3}})$$

oder

$$4)\quad x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}=(x-\frac{1}{x})^2(x^{2m-1}+\frac{1}{x^{2m-1}})+2(x^{2m-1}+\frac{1}{x^{2m-1}})$$
$$-(x^{2m-3}+\frac{1}{x^{2m-3}})$$

folgt, wenn $m = 1$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})^2(x+\frac{1}{x})+x+\frac{1}{x}=(x+\frac{1}{x})[(x-\frac{1}{x})^2+1]$$

also, wenn $m = 2$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=(x-\frac{1}{x})^2(x^3+\frac{1}{x^3})+2(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x})$$
$$=(x+\frac{1}{x})[(x-\frac{1}{x})^4+3(x-\frac{1}{x})^2+1]$$

Setzt man diese Entwickelung fort, so findet man allgemein

$$5)\quad x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}=(x+\frac{1}{x})[(x-\frac{1}{x})^{2m}+(2m-1)(x-\frac{1}{x})^{2m-2}\ldots\ldots$$
$$+\frac{(2m-r)(2m-r-1)\ldots(2m-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r}(x-\frac{1}{x})^{2m-2r}\ldots\ldots]$$

Dass diese Formel für $m+1$ gilt, wenn sie für $m$ statt findet, also allgemein richtig ist, erhellt aus Folgendem. Aus 4) ergiebt sich

$$x^{2m+3}+\frac{1}{x^{2m+3}}=(x-\frac{1}{x})^2(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}})$$
$$+2(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}})-(x^{2m-1}+\frac{1}{x^{2m-1}})$$

Das Glied mit der Potenz $(x-\frac{1}{x})^{2m+2-2r}$ in der Entwickelung von $x^{2m+3}+\frac{1}{x^{2m+3}}$ erhält man demnach, wenn man das Glied mit der Potenz $(x-\frac{1}{x})^{2m-2r}$ in der Entwickelung von $x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}$ mit $(x-\frac{1}{x})^2$ multiplicirt, dazu das

Doppelte des Gliedes mit der Potenz $(x - \frac{1}{x})^{2m-2r+2}$ $= (x - \frac{1}{x})^{2m-2(r-1)}$ aus der Entwickelung von $x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}}$ addirt und das Glied mit der Potenz $(x - \frac{1}{x})^{2m-2r+2}$ $= (x - \frac{1}{x})^{2(m-1)-2(r-2)}$ aus der Entwickelung von $x^{2m-1} + \frac{1}{x^{2m-1}}$ abzieht. Dies giebt

$$\frac{(2m-r)(2m-r-1)\ldots(2m-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r} + 2\frac{(2m-(r-1)(2m-r)\ldots.(2m-2r+3)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r-1)}$$

$$- \frac{(2m-2-(r-2))(2m-2-(r-2)-1)\ldots(2m-2-2(r-2)+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r-2)}$$

$$= \frac{(2m-r)(2m-r-1)\ldots(2m-2r+3)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(r-2)}\left(\frac{(2m-2r+2)(2m-2r+1)}{(r-1)\,r} + \frac{2m-r+1}{r-1} + 1\right)$$

$$= \frac{(2m+2-r)(2m+1-r)(2m-r)\ldots(2m-2r+3)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}$$

$$= \frac{(2(m+1)-r)(2(m+1)-(r+1))\ldots.(2(m+1)-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r}$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Setzt man wieder $x = \cos a + \sin a . i$ so ist $x - \frac{1}{x}$ $= 2 \sin a . i$ und es folgt aus 5)

$$\frac{\cos(2m+1)a}{\cos a} = 2^{2m} (\sin a)^{2m} . i^{2m} + (2m-1)2^{2m-2} (\sin a)^{2m-2} i^{2m-2} + ..$$

oder

$$\frac{\cos(2m+1)a}{\cos a} = \pm 2^{2m} (\sin a)^{2m} \mp (2m-1)\, 2^{2m-2} (\sin a)^{2m-2}$$

wo nun das allgemeine Glied

$$\pm \frac{(2m-r)(2m-r-1)\ldots(2m-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r} 2^{2m-2r} (\sin a)^{2m-2r}$$

ist, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $m - r = 2k$ oder $= 2k + 1$ ist, d. h. je nachdem $2m + 1$ in der Form $4k + 1$ oder $4k + 3$ enthalten ist.

Das letzte Glied erhält man, wenn man $m = r$ setzt, und

es ist daher $= \frac{r(r-1)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots r} = 1$. Setzt man in dem allgemeinen Gliede $r = m - k$ so geht dasselbe in

$$\pm \frac{(m+k)(m+k-1)\ldots(2k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-k)}\, 2^{2k}\, (sin\, a)^{2k}$$

$$= \pm \frac{(m+k)(m+k-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2k}\, 2^{2k}\, (sin\, a)^{2k}$$

über, also, wenn man $2m + 1 = n$ setzt, mithin $m = \frac{n-1}{2}$,

$m + k = \frac{n+2k-1}{2}$, $m - k + 1 = \frac{n-2k+1}{2}$ und

$$(m+k)(m-k+1) = \frac{n^2-(2k-1)^2}{2^2}$$

so geht mithin das allgemeine Glied in

$$\pm \frac{(n^2\quad 1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2k-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2k}\, (sin\, a)^{2k}$$

über, wodurch man die Formel 37) des §. 124 und aus ihr die Formel 41) des §. 125 erhält.

4.

Aus

$$x^{2m} - \frac{1}{x^{2m}} = (x - \frac{1}{x})(x^{2m-1} + \frac{1}{x^{2m-1}}) + (x^{2m-2} - \frac{1}{x^{2m-2}})$$

folgt

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})$$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = (x - \frac{1}{x})(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 - \frac{1}{x^2}) = (x - \frac{1}{x})[(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x + \frac{1}{x})]$$

$$x^6 - \frac{1}{x^6} = (x - \frac{1}{x})(x^5 + \frac{1}{x^5}) + (x - \frac{1}{x})[(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x + \frac{1}{x})]$$

$$= (x - \frac{1}{x})[(x^5 + \frac{1}{x^5}) + (x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x + \frac{1}{x})]$$

Auf diese Weise findet man allgemein

$$x^{2m} - \frac{1}{x^{2m}} = (x - \frac{1}{x})[(x^{2m-1} + \frac{1}{x^{2m-1}}) + (x^{2m-3} + \frac{1}{x^{2m-3}}) \ldots + (x + \frac{1}{x})]$$

Setzt man wieder $x = cos\, a + sin\, a.i$ so erhält man

$$\frac{\sin.2ma}{\sin a} = 2\,[\cos(2m-1)a + \cos(2m-3)a + \ldots + \cos a]$$

was sich auch aus Formel 17) des §. 117 ergiebt wenn man dort $\psi = a$, $\alpha = 2a$, $r = m$ setzt.

5.

Man hat auch

$$x^{2m} - \frac{1}{x^{2m}} = (x - \frac{1}{x})^2\,(x^{2m-2} - \frac{1}{x^{2m-2}}) + 2(x^{2m-2} - \frac{1}{x^{2m-2}})$$
$$- (x^{2m-4} - \frac{1}{x^{2m-4}})$$

nun ist

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})\,(x - \frac{1}{x})$$

also

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = (x - \frac{1}{x})^2(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 2(x^2 - \frac{1}{x^2}) = (x + \frac{1}{x})[(x - \frac{1}{x})^3 + 2(x - \frac{1}{x})]$$

$$x^6 - \frac{1}{x^6} = (x + \frac{1}{x})\,[(x - \frac{1}{x})^5 + 4\,(x - \frac{1}{x})^3 + 3\,(x - \frac{1}{x})]$$

Man findet allgemein

$$6)\quad x^{2m} - \frac{1}{x^{2m}} = (x + \frac{1}{x})\,[(x - \frac{1}{x})^{2m-1} + (2m-2)\,(x - \frac{1}{x})^{2m-3}$$
$$+ \frac{(2m-3)\,(2m-4)}{1\,.\,2}\,(x - \frac{1}{x})^{2m-5} + \ldots]$$

Das allgemeine Glied dieser Formel ist

$$\frac{(2m-r-1)\ldots\ldots(2m-2r)}{1\ldots\ldots r}\,(x - \frac{1}{x})^{2m-(2r+1)}$$

und es ist leicht, in ähnlicher Weise, wie dies bei den vorhergehenden Formeln geschehen ist, die allgemeine Richtigkeit dieses Ausdrucks nachzuweisen.

Setzt man wieder $x = \cos a + \sin a.i$ so ergiebt sich hieraus

$$\frac{\sin 2ma}{\cos a} = (-1)^{m-1}\, 2^{2m-1}\, (\sin a)^{2m-1}$$

$$+ (-1)^{m-2}\, 2^{2m-3}\, (2m-2)\, (\sin a)^{2m-3} \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$+ (-1)^{m-r-1}\, 2^{2m-(2r+1)} \frac{(2m-r-1)\ldots.(2m-2r)}{1\,.\,.\,.\,.\,r} (\sin a)^{2m-(2r+1)}$$

$$+ \ldots.$$

und wenn man $r-k$ statt $r$ und $m=r$ setzt, so verwandelt sich das allgemeine Glied in

$$(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \frac{(r+k-1)\ldots.2k}{1\,.\,.\,.\,(r-k)} (\sin a)^{2k-1}$$

$$= (-1^{k-1}\, 2^{2k-1} \frac{(r+k-1)\ldots.(r-k+1)}{1\,.\,.\,.\,.\,(2k-1)} (\sin a)^{2k-1}$$

oder, wenn man $k+1$ statt $k$ setzt, in

$$(-1)^{k}\, 2^{2k+1} \frac{(r+k)\ldots.(r-k)}{1\ldots.(2k+1)} (\sin a)^{2k+1}$$

Der Zähler dieses Ausdrucks hat das Mittelglied $r=m$. Setzt man nun $2r=n$ also $r=\frac{n}{2}$ so wird $(r+k)(r-k)$ $= \frac{(n+2k)}{2} \cdot \frac{(n-2k)}{2} = \frac{n^2-2^2k^2}{2^2}$, und daher das allgemeine Glied

$$(-1)^{k} \cdot \frac{n.(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots.(n^2-2^2k^2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,2k+1} (\sin a)^{2k+1}$$

übereinstimmend mit Formel 36) des §. 123 aus welcher sich Formel 40) des §. 125 ergiebt.

6.

Die vorhergehenden Formeln können noch in mancherlei Weise benutzt werden. Setzt man z. B. $x+\frac{1}{x}=1$ also $x^2-x=-1$ so ist $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, nun ist

$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pm 2\pi}{3}}$ (§. 110) also $-e^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ und

$-e^{\frac{-2\pi}{3}} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, die zwei Werthe von $x$ sind mithin

$-e^{\frac{2\pi}{3}}$ und $-e^{\frac{-2\pi}{3}}$ und setzt man $x = e^{\frac{2\pi}{3}}$ so ist $\frac{1}{x} = -e^{\frac{-2\pi}{3}}$ also nach Formel 2) dieser Note, da nun $x + \frac{1}{x} = 1$,

$$(-1)^n\left(e^{\frac{2n\pi}{3}i} + e^{\frac{-2n\pi}{3}i}\right) = (-1)^n \cos 2\frac{2n\pi}{3} = 1 - n + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2} \ldots$$
$$\mp \frac{n(n-r-1)\,(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r} \mp \ldots\ldots$$

oder

$$\frac{1 + (-1)^{n+1}\,.\,2\cos\frac{2n\pi}{3}}{n} = 1 - \frac{n-3}{1\,.\,2} + \frac{(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots$$
$$\mp \frac{(n-r-1)\,(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,r} \pm \ldots\ldots$$

Je nachdem nun $n$ in der Form $6m$, $6m \pm 1$, $6m \pm 2$, $6m + 3$ enthalten ist, wird $(-1)^{n+1} 2\cos\frac{2n\pi}{3} = -2, -1, 1, 2$, also der Werth der Reihe $= -\frac{1}{n}, 0, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ seyn. Ist $n$ eine Primzahl (abgesehen von der geraden Primzahl 2), so kann sie nur in der Form $6m \pm 1$ enthalten seyn, folglich ist die Reihe immer Null, sobald $n$ eine Primzahl ist. Z. B. ist $n = 17$ so wird die Reihe

$$1 - \frac{14}{2} + \frac{13\,.\,12}{2\,.\,3} - \frac{12\,.\,11\,.\,10}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$
$$- \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} - \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8}$$
$$= 1 - 7 + 26 - 55 + 66 - 42 + 12 - 1 = 0$$

Setzt man $x - \frac{1}{x} = 1$ so folgt $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ also $\frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, demnach folgt aus Formel 5) und 6) dieser Note

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^{2n+1}+(\sqrt{5}-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}}=\sqrt{5}[1+2n-1+\frac{(2n-2)(2n-3)}{1\,.\,2}+\ldots]$$

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^{2n}-(\sqrt{5}-1)^{2n}}{2^{2n}}=\sqrt{5}[1+2n-2+\frac{(2n-3)(2n-4)}{1\,.\,2}+\ldots]$$

7.

Uebrigens lassen sich diese Formeln auch noch verallgemeinern und daraus mancherlei merkwürdige Ergebnisse ableiten. Statt der Formel 1) z.B. könnte man auch die Formel

$$x^n+y^n=(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

nehmen, aus welcher, der Formel 2) entsprechend,

$$7)\quad x^n+y^n=(x+y)^n-nxy(x+y)^{n-2}+\frac{n.(n-3)}{1\,.\,2}(xy)^2(x+y)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(xy)^3(x+y)^{n-6}+\ldots$$

folgt. Daraus ergiebt sich sogleich, dass

$$(x+y)^n-x^n-y^n$$

immer durch $n(x+y)xy$ theilbar ist, wenn $n$ eine ungerade Zahl ist.

Ferner da $(x+y)^2=x^2+xy+y^2+xy$, also wenn man $n=2k+1$ setzt, $(x+y)^{2k+1-2p}=(x+y)(x+y)^{2(k-p)}$ $=(x+y)(x^2+xy+y^2+xy)^{k-p}$, so wird wenn man $x^2+xy+y^2=A$, $xy=B$ setzt, die Entwickelung von $(A+B)^{k-p}=A^{k-p}$ $+(k-p)A^{k-1-p}\,.\,B+\ldots+B^{k-p}$ in allen Gliedern $A$ enthalten, mit Ausnahme des letzten Gliedes, welches $B^{k-p}=(xy)^{k-p}$ ist. D. h. der Ausdruck $(x+y)^{2(k-p)}$ wird, durch $x^2+xy+y^2$ dividirt, den Rest $(xy)^{k-p}$ geben. Nun ist nach Form. 7)

$$(x+y)^{2k+1}-(x^{2k+1}+y^{2k+1})=(2k+1)xy(x+y)[(x+y)^{2(k-1)}$$
$$-\frac{2k-2}{1\,.\,2}xy(x+y)^{2(k-2)}+\frac{(2k-3)(2k-4)}{1\,.\,2\,.\,3}(xy)^2(x+y)^{2(k-3)}-\ldots]$$

dividirt man also mit $x^2+xy+y^2$ so giebt $(x+y)^{2(k-1)}$ den

Rest $(xy)^{k-1}$, ferner $(x+y)^{2(k-2)}$ den Rest $(xy)^{k-2}$ u. s. w. Mithin giebt $(x+y)^{2k+1} - (x^{2k+1} + y^{2k+1})$ durch $x^2+xy+y^2$ dividirt, den Rest

$$(2k+1)xy(x+y)\left[1-\frac{2k-2}{1.2}+\frac{(2k-3)(2k-4)}{1.2.3}-\ldots\right](xy)^{k-1}$$

Ist nun $n = 6m \pm 1$ so ist, wie oben bewiesen wurde,

$$1-\frac{2k-2}{1.2}+\frac{(2k-3)(2k-4)}{1.2.3}-\ldots=1-\frac{n-3}{1.2}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2.3}-\ldots=0$$

mithin wird $(x+y)^n - (x^n+y^n)$ auch durch $x^2+xy+y^2$ theilbar seyn, sobald $n = 6m \pm 1$. Ist dagegen $n = 6m+3$ so ist, wie ebenfalls oben gezeigt wurde,

$$1-\frac{2k-2}{1.2}+\frac{(2k-3)(2k-4)}{1.2.3}\ldots=\frac{3}{n}$$

mithin giebt die Division von $(x+y)^n - (x^n+y^n)$ durch $x^2+xy+y^2$ den Rest $n(xy)(x+y)\frac{3}{n}(xy)^{k-1} = 3(x+y)(xy)^{\frac{n-1}{2}}$, oder, wenn $n = 6m+3$, so ist $(x+y)^n - (x^n+y^n) - 3(x+y)(xy)^{\frac{n-1}{2}}$ durch $x^2+xy+y^2$ theilbar *).

## Note VI.

### Entwickelung verschiedener Produkte und damit in Verbindung stehender Reihen.

#### 1.

Wenn der Ausdruck

$$X = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ nicht $x$ enthalten, Null wird, wenn $x = x^1$ ist, so wird $x - x^1$ ein Faktor von $X$ seyn, d. h. es wird $X$ durch $x - x^1$ ohne Rest theilbar seyn.

Nach der Voraussetzung ist

*) Für $n = 6m \pm 1$ hat schon Cauchy den betreffenden Satz bewiesen; man vergleiche Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences T. 9 p. 362.

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} \ldots + a_n = 0$$

also auch

$$X = x^n - x_1^n + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) \ldots + a_{n-1}(x - x^1)$$

Nun ist aber, wenn $r$ irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$x^r - x_1^r = (x - x_1)(x^{r-1} + x_1 x^{r-2} + x_1^2 x^{r-3} \ldots + x_1^{r-1})$$

wie man unmittelbar findet, wenn man die angedeutete Multiplikation ausführt. Es ist also für jedes solche $r$ der Ausdruck $x^r - x_1^r$ durch $x - x^1$ ohne Rest theilbar. Nun ist

$$\frac{X}{x - x^1} = \frac{x^n - x_1^n}{x - x^1} + a_1 . \frac{x^{n-1} - x_1^{n-1}}{x - x^1} + a_2 . \frac{x^{n-2} - x_1^{n-2}}{x - x_1} \ldots + a_{n-1}$$

also ist auch $X$ durch $x - x^1$ ohne Rest theilbar und man hat

$$\frac{X}{x - x^1} = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} \ldots + b_{n-1}$$

wo wieder $b_1$, $b_2 \ldots b_{n-1}$ Grössen bedeuten, die kein $x$ enthalten. Ist ferner $x_2$ ein von $x_1$ verschiedener Werth, welcher ebenfalls, statt $x$ gesetzt, $X$ zu Null macht, so muss aus demselben Grunde $x - x_2$ ein Faktor von $X$ seyn, und da $x - x^1$ sich nicht durch $x - x_2$ theilen lässt, so muss $x - x_2$ ein Faktor von $x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ seyn, d. h. es muss

$$\frac{X}{(x - x_1)(x - x_2)} = x^{n-2} + c_1 x^{n-3} \ldots + c_{n-2}$$

seyn, wo $c_1, \ldots c_{n-2}$ Ausdrücke sind, die kein $x$ enthalten. Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man den Satz:

Hat man $n$ verschiedene Werthe $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ welche statt $x$ gesetzt $X$ zu Null machen, so ist

$$\frac{X}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)} = x^{n-n} = 1$$

oder

$$X = (x - x^1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Hat man $X = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, wo wieder $a_0$, $a_1 \ldots a_n$ Werthe sind, die kein $x$ enthalten, und bezeichnen wieder $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Werthe, welche statt $x$ ge-

setzt $X$ zu Null machen, so werden sie auch $\frac{X}{a_0}$ d. h.

$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}$ zu Null machen, also ist auch

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} \ldots + \frac{a_n}{a_0} = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

und mithin

$$X = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

2.

Aus §. 122 Form. 35 folgt, dass man, wenn $n$ eine gerade Zahl ist, und $(\sin a)^2 = x$ gesetzt wird,

$$1) \qquad \cos na = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

hat, wo $a_1 = -\frac{n^2}{1.2}$, $a_2 = \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}$ u. s. w. ist. Nun wird aber $\cos na$ Null, wenn man für $a$ einen der $n$ verschiedenen Werthe $\pm\frac{\pi}{2n}$, $\pm\frac{3\pi}{2n} \ldots \pm\frac{(n-1)\pi}{2n}$ setzt, d. h. wenn man für $x$ einen der $\frac{n}{2}$ verschiedenen Werthe $(\sin\frac{\pi}{2n})^2$, $(\sin\frac{3\pi}{2n})^2 \ldots (\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})^2$ nimmt. Setzt man also $\cos na = X$, so hat man

$$X = a_{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} + \ldots + a_1 x + 1$$

und demnach, in Folge des vorher bewiesenen Satzes,

$$\cos na = a_{\frac{n}{2}} \left[x - (\sin\frac{\pi}{2n})^2\right] \left[x - (\sin\frac{3\pi}{2n})^2\right] \ldots \left[x - (\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})^2\right].$$

Setzt man $a = 0$ und mithin $x = 0$, so ist $\cos na = 1$ und es folgt daher aus der letzten Gleichung

$$a_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{-(\sin\frac{\pi}{2n})^2 . -(\sin\frac{3\pi}{2n})^2 \ldots - (\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})^2}$$

Setzt man aber $x-\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 = -\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(1-\frac{x}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right)$,

$x-\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 = -\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(1-\frac{x}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right)$ u. s. w. und berücksichtigt den Werth von $a_{\frac{n}{2}}$ so folgt

2) $$\cos na = \left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

und wenn man wieder $(\sin a)^2$ statt $x$ setzt

$$\cos na = \left[1-\frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

oder, wenn man $\frac{a}{n}$ statt $a$ setzt,

3) $$\cos a = \left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Setzt man in Form. 44 des §. 76 statt $a_0$ den Ausdruck $-a_0 x$, statt $b_0$ den Ausdruck $-b_0 x$ u. s. w. so folgt

$$(1-a_0 x)(1-b_0 x)\ldots = 1-\overset{1}{C}{}^1 x+\overset{2}{C}{}^1 x^2-\overset{3}{C}{}^1 x^3\ldots$$

wo wieder $C^1$ die Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen $a_0$, $b_0$ .... bezeichnet. Setzt man nun

$$a_0 = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2},\ b_0 = \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\ \ldots\ldots$$

so folgt aus dem Vergleich der Formeln 1) und 2)

$$a_1 = -\overset{1}{C} \text{ d. h.}$$

4) $$\frac{n^2}{2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\cdots+\frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}$$

ebenso fände man $a_2 = \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4} = \overset{2}{C^1}$ u. s. w. Schliesslich hätte man noch

$$a_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \overset{\frac{n}{2}}{C^1}$$

$\overset{\frac{n}{2}}{C^1}$ bedeutet die Combinationen der $\frac{n}{2}$ ten Klasse aus den $\frac{n}{2}$ Elementen $\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2$ also

$$\overset{\frac{n}{2}}{C^1} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 \cdots \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2} (-1)^{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}}$$

wie schon oben gefunden wurde.

Nun ist aber $a_{\frac{n}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n^2(n^2-2^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, .\, n}$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n^2-2^2)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{1 \,.\, 2 \ldots (n-1)}$$

Setzt man $n^2 - 2^2 = (n+2)(n-2)$, allgemein $n^2 - (2k)^2 = (n+2k)(n-2k)$, so dass der letzte Faktor des Zählers in $(n+n-2)(n-(n-2)) = (2n-2)2$ übergeht, und bedenkt man, dass alle diese Faktoren, wie $n$, gerade Zahlen sind, so findet man, wenn man die Faktoren nach ihrer Grösse ordnet,

$$a_{\frac{n}{2}} = \frac{2 \,.\, 4 \ldots 2n-2}{1 \,.\, 2 \ldots (n-1)} (-1)^{\frac{n}{2}} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}$$

und

$$5) \qquad \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 . \left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 \ldots \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3.

Aus Formel 37) des §. 124. ergiebt sich ebenso für ein ungerades $n$

$$\frac{\cos na}{\cos a} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

wo wieder $x = (\sin a)^2$ und $b_1 = -\frac{n^2-1}{1.2}$, $b_2 = \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}$ u. s. w. ist. In diesem Falle wird $\cos na$ Null, wenn man für $a$ einen der $n-1$ verschiedenen Werthe

$$\pm \frac{\pi}{2n}, \pm \frac{3\pi}{2n} \ldots \pm \frac{(n-2)\pi}{2n}$$

setzt. Die Wiederholung der vorhergehenden Betrachtungen zeigt also dass

$$\frac{\cos na}{\cos a} = b_{\frac{n-1}{2}} \left[x - \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\right] \left[x - \left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\right] \ldots \left[x - \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2\right]$$

und

$$b_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 \left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 \ldots \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2},$$

woraus

$$\frac{\cos na}{\cos a} = \left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right] \left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right] \ldots \left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

oder

$$6)\quad \frac{\cos na}{\cos a} = \left[1 - \frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right] \left[1 - \frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right] \ldots \left[1 - \frac{(\sin a)^2}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

folgt, und wenn man $\frac{a}{n}$ statt $a$ setzt,

$$7)\quad \cos a = \cos\frac{a}{n} \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right] \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right] \ldots \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Man findet ferner, dass $-b_1$ den Combinationen ohne Wie-

derholung zur ersten Klasse aus den Elementen $\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}$, $\frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} \cdots \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$ gleich ist, ebenso $b_2$ diesen Combinationen zur zweiten Klasse u. s. w. zuletzt $(-1)^{\frac{n-1}{2}} b_{\frac{n-1}{2}}$ diesen Combinationen zur $\frac{n-1}{2}$ten Klasse, also

$$8)\qquad \frac{n^2-1}{1.2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} \cdots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$$

und

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} b_{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\;(n-1)} = 2^{n-1}$$

also

$$9)\qquad \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 \left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 \ldots \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

4.

Mit Beibehaltung derselben Bezeichnung findet man aus §. 123 Form. 36) für ein gerades $n$

$$\frac{\sin na}{n \sin a \cos a} = 1 + c^1 x + c_2 x^2 \ldots + c_{\frac{n-2}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}$$

wo $c^1 = -\frac{n^2-2^2}{1.2.3}$, $c_2 = \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \ldots$

$$c_{\frac{n-2}{2}} = \frac{(n^2-2^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1\ldots\ldots\ldots(n-1)} (-1)^{\frac{n-2}{2}}$$

Nun wird

$$\frac{\sin na}{\sin a} = 0, \text{ wenn } a = \pm\frac{2\pi}{2n}, \pm\frac{4\pi}{2n}, \pm\frac{6\pi}{2n} \ldots \pm\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

während $\cos a$ einen bestimmten Werth annimmt, also ist, wenn $n > 2$,

$$\frac{\sin na}{n \sin a \cos a} = c_{\frac{n-2}{2}}\left[x-\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\right]\left[x-\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\right]\dots\left[x-\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2\right]$$

da aber, wenn man $a = 0$ setzt, auch $x = 0$ ist, während dann $\cos a = 1$ und $\frac{\sin na}{\sin a} = n$ (§. 118 Form. 28), so folgt

$$c_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 \dots \dots \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$$

also

$$\frac{\sin na}{n \sin a \cos a} = \left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{x}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Setzt man wieder für $x$ seinen Werth $(\sin a)^2$ und dann $\frac{a}{n}$ statt $a$ so findet man

10) $$\frac{\sin a}{n \sin\frac{a}{n} \cos\frac{a}{n}} = \left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2}\right]\dots\left[1-\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Im gegenwärtigen Falle ist $-c^1$ die Summe der Combinationen erster Klasse, $c_2$ die Summe der Combinationen zweiter Klasse u.s.w. aus den Elementen $\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 \dots \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$ also namentlich

11) $$\frac{n^2-2^2}{1.2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} \dots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$$

Nun ist $c_{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n^2 \;\, 2^2)\dots[n^2-(n-2)^2]}{1.2\dots\dots(n-1)}$ oder, wie aus dem in §. 2 gefundenen Werthe von $a_{\frac{n}{2}}$ folgt,

$$c_{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{2^{n-1}}{n}, \text{ also, wenn } n > 2$$

12) $$\frac{n}{2^{n-1}} = \left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 \left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 \cdots \left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2.$$

Für ein ungerades $n$ ergiebt sich aus §. 124 Form. 38)

$$\frac{\sin na}{n \sin a} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 \ldots + d_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

wo $d_1 = -\frac{n^2-1}{1.2.3}$, $d_2 = \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \ldots$

$$d_{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Hieraus folgt wieder, wenn $n > 1$,

$$\frac{\sin na}{n \sin a} = \left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{x}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

und

13) $$\frac{\sin a}{n \sin\frac{a}{n}} = \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Auch findet man

14) $$\frac{n^2-1}{1.2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} \cdots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}$$

und

15) $$\frac{n}{2^{n-1}} = \left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 \left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 \cdots \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

## 5.

Man kann nun die Frage aufwerfen, was aus den Formeln 3), 7), 10), 13) wird, wenn man $n$ unbegrenzt wachsen lässt. Betrachten wir zunächst die Formel 3). Wenn man die Reihe für $\sin x$ (§. 95 Form. 5) in der Form

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2..5} - \frac{x^6}{1.2..7} \cdots$$

schreibt, und bedenkt dass diese Reihe convergirt, so sieht

man, dass bei unbegrenzt abnehmendem $x$ sich $\frac{\sin x}{x}$ unbegrenzt der Einheit nähert, was durch $\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ ausgedrückt werden soll. Nun ist

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\frac{a}{n}}{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2a}{\pi}$$

Lässt man also $n$ unbegrenzt wachsen, so dass $\frac{a}{n}$ und $\frac{\pi}{2n}$ unbegrenzt abnehmen, so ist $\lim\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\right) = 1$, $\lim\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right) = 1$, mithin $\lim\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{2a}{\pi}$. Auf dieselbe Weise findet man, dass überhaupt $\lim\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right) = \frac{2a}{k\pi}$. Demnach ist

$$\lim\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right] = 1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2} \text{ und allgemein}$$

$$\lim\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right)^2\right] = 1 - \frac{2^2 a^2}{k^2 \pi^2}.$$

Aber dies berechtigt uns noch nicht, das Produkt aller Faktoren $1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2}$, $1 - \frac{2^2 a^2}{3^2 \pi^2}$ u. s. w. als die Grenze der in Formel 3) enthaltenen Faktorenfolge anzusehen. Dieser Schluss wäre richtig, wenn die Anzahl dieser Faktoren eine endliche

wäre; er ist aber nicht richtig, weil bei unbegrenzt wachsendem $n$ auch die Anzahl dieser Faktoren unbegrenzt gross wird. Hat man nemlich $m$ Ausdrücke $A$, $B$, $C$, . . . welche bei unbegrenzt wachsendem $n$ bezüglich in $a_0$, $b_0$, $c_0$ . . . übergehen, so dass $lim\ A = a_0$, $lim\ B = b_0$, $lim\ C = c_0$ u. s. w. und setzt man daher $A = a_0 + a_1$, $B = b_0 + b_1$, $C = c_0 + c_1$ u. s. w. so müssen $a_1$, $b_1$, $c_1$ . . . Grössen seyn, welche bei unbegrenzt wachsendem $n$ unbegrenzt abnehmen. Setzt man nun

$$ABC\ldots = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)(c_0 + c_1)\ldots.$$

so hat man (Kap. 3)

$$ABC\ldots = {}^0\overset{m}{V} + {}^1\overset{m}{V} + {}^2\overset{m}{V} + \ldots.$$

wo ${}^k\overset{m}{V}$ die Variationen der $m$ten Klasse zur Summe $k$ aus den Elementenreihen

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \\ \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

bedeuten, so dass die Elemente in jeder Form Faktoren sind. Demnach ist ${}^0\overset{m}{V}$ das Produkt der Faktoren $a_0$, $b_0$, $c_0$ . . . In ${}^1\overset{m}{V}$, ${}^2\overset{m}{V}$ u. s. w. aber enthält jedes Glied einen oder mehrere Faktoren aus der Reihe $a_1$, $b_1$ . . . Jeder dieser letzteren Ausdrücke hat also einen unbegrenzt kleinen Werth, wenn die Grössen $a_1$, $b_1$, . . . unbegrenzt klein sind. Ist demnach $m$ eine endliche Zahl, so ist ${}^1\overset{m}{V} + {}^2\overset{m}{V} + \ldots.$ die Summe einer endlichen Zahl unbegrenzt kleiner Ausdrücke, mithin diese Summe selbst unbegrenzt klein und $lim\ (ABC\ldots) = {}^0\overset{m}{V} = a_0 b_0 c_0 \ldots.$ Ist dagegen $m$ unbegrenzt gross, so kann $lim\ ({}^1\overset{m}{V} + {}^2\overset{m}{V} + \ldots.)$ als Grenze einer aus unbegrenzt vielen, wenn auch unbegrenzt kleinen Gliedern, bestehenden Reihe einen endlichen oder gar unbegrenzt grossen Werth haben.

Nichts destoweniger lässt sich, wie folgt, beweisen, dass in der That die Gleichung

$$\cos a = \left(1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{5^2 \pi^2}\right)\ldots.$$

statt hat.

6.

Aus (§. 95 Form. 4 und 5)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdots$$

$$x \cos x = x - \frac{x^5}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4} \cdots$$

folgt

$$\sin x - x \cos x = \frac{x^3}{1.2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{x^5}{1..4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{x^7}{1...6}\left(1 - \frac{1}{7}\right) - \frac{x^9}{1..8}\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots$$

$$= \frac{x^3}{1.2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{x^5}{1...4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{x^7}{1...6} \cdot \frac{6}{7} - \frac{x^9}{1...8} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

In dieser Reihe sind die Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen. Setzt man nun $x \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$, so ist offenbar jedes Glied kleiner als das vorhergehende. Es ist daher (vgl. §. 97) unter dieser Voraussetzung

$$\sin x - x \cos x > \frac{x^3}{1.2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{x^5}{1..4} \cdot \frac{4}{5}$$

d. h. wenn $x$ zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten ist, so ist

$$\sin x > x \cos x$$

und da $\frac{\pi}{4} < 1$ (§. 97. 99), so gilt dies umsomehr für die Werthe von $x$, welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegen.

Aus

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^3}{1.2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5}\right) - \frac{x^7}{1.2...7}\left(1 - \frac{x^2}{8.9}\right) \cdots$$

folgt auch noch, dass $\frac{\sin x}{x} < 1$, wenn $x$ zwischen 0 und 1 liegt, also umsomehr $\frac{\sin x}{x} < 1$, wenn $x$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt.

Nun kann man statt der Formel 12) des §. 95 auch schreiben

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \,.\, y \,.\, \frac{\sin y}{y}$$

demnach ist

$$\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(x+y)}{x+y}=\frac{x\sin x(1-\cos y)+y(\sin x-x\cos x\frac{\sin y}{y})}{x(x+y)}$$

Ist nun $x > 0$ und zugleich $x \leqq \frac{\pi}{4}$ so ist, wie so eben bewiesen wurde,

$$\sin x > x \cos x$$

ist zugleich $y > 0$ und $y \leqq \frac{\pi}{4}$ so ist auch $\frac{\sin y}{y} < 1$ also umsomehr

$$\sin x > x \cos x \frac{\sin y}{y}$$

und daher $y(\sin x - x\cos x \frac{\sin y}{y})$ positiv. Nun ist auch $x \sin x\ (1-\cos y)$ positiv, folglich auch die Differenz $\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(x+y)}{x+y}$. Wenn also $x$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ und $(x+y)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten ist, so ist

$$16)\qquad \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

Dieses Verhältniss findet aber auch noch statt, wenn $x$ und $x+y$ zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Man setze nemlich in diesem Falle $x = \frac{\pi}{4} + x^1$ und $x+y = \frac{\pi}{4} + x^1 + y^1$ so dass mithin $x^1$ und $x^1 + y^1$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegen, so wird man auch

$$17)\qquad \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x^1)}{\frac{\pi}{4}+x^1} > \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x^1+y^1)}{\frac{\pi}{4}+x^1+y^1}$$

haben. Setzt man nemlich in Form. 12 des §. 95 $\frac{\pi}{4}+x^1$ statt $x$ und $y^1$ statt $y$ so erhält man

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1+y^1\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\cos y^1+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\sin y^1$$

also

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)}{\frac{\pi}{4}+x^1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1+y^1\right)}{\frac{\pi}{4}+x^1+y^1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)(1-\cos y^1)+y^1\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)-\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\sin y^1}{\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\left(\frac{\pi}{4}+x^1+y^1\right)}$$

Setzt man aber in Form. 11) und 12 des §. 95 $x=x^1$, $y=\frac{\pi}{4}$ und berücksichtigt, dass $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (§. 99 Form. 27) so findet man

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x^1+\cos x^1);\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x^1-\sin x^1)$$

Demnach ist

$$y^1\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)-\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\sin y^1$$

$$=\frac{y^1}{\sqrt{2}}\left[\sin x^1+\cos x^1-\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)(\cos x^1-\sin x^1)\frac{\sin y^1}{y^1}\right]$$

$$=\frac{y^1}{\sqrt{2}}\left[\sin x^1-x^1\cos x^1\frac{\sin y^1}{y^1}+\cos x^1\left(1-\frac{\pi}{4}\frac{\sin y^1}{y^1}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)\sin x^1\frac{\sin y^1}{y^1}\right]$$

Dieser Ausdruck ist positiv, da $\sin x^1 > x^1\cos x^1\frac{\sin y^1}{y^1}$ und $\frac{\pi}{4}<1$ also um so mehr $\frac{\pi}{4}\frac{\sin y^1}{y^1}<1$. Nun ist ausserdem $1-\cos y^1$ positiv, also die Differenz

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1\right)}{\frac{\pi}{4}+x^1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x^1+y^1\right)}{\frac{\pi}{4}+x^1+y^1}$$

positiv, wodurch die Richtigkeit der Formel 17) bewiesen ist.

Der Werth von $\frac{\sin x}{x}$ nimmt demnach fortwährend ab, wenn $x$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt. Ist also $x + y \gtrless \begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix}$ so ist

$$\frac{\sin (x+y)}{x+y} > \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}, \text{ also da } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\frac{\sin (x+y)}{x+y} > \frac{2}{\pi}$$

oder

$$\frac{x+y}{\sin (x+y)} < \frac{\pi}{2}$$

und um so mehr

$$\frac{x+y}{\sin (x+y)} \cdot \frac{\sin x}{x} < \frac{\pi}{2}$$

d. h.

18) $$\frac{\sin x}{\sin (x+y)} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x+y}$$

und zugleich nach 16)

19) $$\frac{\sin x}{\sin (x+y)} > \frac{x}{x+y}$$

7.

Bezeichne nun $k$ irgend eine bestimmte ganze positive ungerade Zahl. Man zerlege das Produkt 3) in zwei Faktoren, der eine sey

$$P = \left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{3\pi}{2n}}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{k\pi}{2n}}\right)^2\right]$$

der andere

$$P_1 = \left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{(k+2)\pi}{2n}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{(k+4)\pi}{2n}}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2\right]$$

Es ist also zu untersuchen was bei unbegrenzt wachsendem $n$ aus dem Produkte $PP^1$ wird. Insofern nun, wie schon oben bemerkt wurde, $\lim\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{2a}{\pi}$ u. s. w. ist, so hat man, da $k$ eine endliche Zahl ist,

$$\lim P = \left(1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2 \pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2^2 a^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Wie gross nun auch immer $a$ sey, so kann man sich die Zahl $k$ so gross denken, dass $a < \frac{(k+2)\pi}{2}$ also $\frac{a}{n} < \frac{(k+2)\pi}{2n}$, sobald mithin $n > k+2$ ist $\frac{(k+2)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ und um so mehr $\frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}$. Nun muss aber in der That $n > k+2$, $n > k+4$ u. s. w. vorausgesetzt werden, da der letzte in $P^1$ erscheinende Faktor den Ausdruck $\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$ enthält. Aus Formel 19) folgt hiernach

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(k+2)\pi}{2n}} > \frac{2a}{(k+2)\pi}$$

und aus Formel 8)

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(k+2)\pi}{2n}} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2a}{(k+2)\pi} \text{ d. h. } < \frac{a}{k+2}$$

In derselben Weise findet man

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(k+4)\pi}{2n}} > \frac{2a}{(k+4)\pi}$$
$$< \frac{a}{k+4}$$

und schliesslich

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}} \begin{array}{l} > \frac{2a}{(n-1)\pi} \\ < \frac{a}{n-1} \end{array}$$

Demnach ist

$$1 - \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(k+2)\pi}{2n}}\right)^2 \begin{array}{l} > 1 - \frac{a^2}{(k+2)^2} \\ < 1 - \frac{2^2 a^2}{(k+2)^2 \pi^2} \end{array}$$

$$1 - \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{(k+4)\pi}{2n}}\right)^2 \begin{array}{l} > 1 - \frac{a^2}{(k+4)^2} \\ < 1 - \frac{2^2 a^2}{(k+4)^2 \pi^2} \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

mithin, wenn man

$$R = \left(1 - \frac{2^2 a^2}{(k+2)^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{(k+4)^2 \pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2^2 a^2}{(n-1)^2 \pi^2}\right)$$

$$r = \left(1 - \frac{a^2}{(k+2)^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{(k+4)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{a^2}{(n-1)^2}\right)$$

setzt, so ist

$$P^1 \begin{array}{l} < R \\ > r \end{array}$$

wie gross immer $n$ sey.

Nun ist $R$ nur die Fortsetzung der Faktorenfolge

$$\text{A)} \quad \left(1 - \frac{2^2 a^2}{2^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{5^2 \pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2^2 a^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

und $r$ die Fortsetzung der Faktorenfolge

$$\text{B)} \quad \left(1 - \frac{a^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{5^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)$$

Die Produkte A) und B) sind aber beide convergent, wenn man sie sich als unendliche denkt, und haben einen endlichen von Null verschiedenen Werth, wie sowohl aus Kap. 12 §. 134 als §. 136 folgt, da die Reihe

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

convergirt (§. 61). Demnach müssen, wenn $k$ und $n$ unbegrenzt wachsen, die Gleichungen $lim\ R = 1$, $lim\ r = 1$ statt finden, also auch $lim\ P^1 = 1$, es kommt also je mehr man $k$ wachsen lässt, der Werth von $cos\ a$ dem Werthe von $P$ desto näher, oder

20) $$cos\ a = lim\ P = (1 - \frac{2^2a^2}{\pi^2})(1 - \frac{2^2a^2}{3^2\pi^2})(1 - \frac{2^2a^2}{5^2\pi^2}) \ldots\ldots$$

Dieselbe Gleichung findet man auch aus Form. 7) wenn man bedenkt, dass $lim\ cos\ \frac{a}{n} = cos\ (0) = 1$ ist.

8.

Schreibt man in der Formel 18) statt $\frac{sin\ a}{n\ sin\ \frac{a}{n}}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{sin\ a}{a \cdot \frac{n}{a}\ sin\ \frac{a}{n}} = \frac{sin\ a}{a} \cdot \frac{(\frac{a}{n})}{sin\ \frac{a}{n}}$ und lässt $n$ unbegrenzt wachsen, so ist (§. 5 dieser Note)

$$lim\ \frac{(\frac{a}{n})}{sin\ \frac{a}{n}} = 1$$

also $lim\ \frac{sin\ a}{n\ sin\ \frac{a}{n}} = \frac{sin\ a}{a}$. Ferner ist

$$lim\ \frac{sin\ \frac{a}{n}}{sin\ \frac{2\pi}{2n}} = \frac{a}{\pi}$$

$$lim\ \frac{sin\ \frac{a}{n}}{sin\ \frac{4\pi}{2n}} = \frac{a}{2\pi}$$

u. s. w.

Wiederholt man also die obigen Betrachtungen, so findet man

21) $$\sin a = a\left(1 - \frac{a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

und dieselbe Gleichung folgt auch aus 10), wenn man wieder berücksichtigt dass $\lim \cos \frac{a}{n} = 1$.

Die Faktoren in 20) sind in der Form $1 - \frac{2^2 a^2}{(2l+1)^2\pi^2}$ enthalten, man hat also $\cos a = 0$ wenn $1 - \frac{2^2 a^2}{(2l+1)^2\pi^2} = 0$ also $a = \pm (2l+1)\frac{\pi}{2}$; umgekehrt folgt aus 20) dass $\cos a$ für keine anderen Werthe von $a$ Null werden kann. Ebenso ergiebt sich aus 21) dass $\sin a$ immer und nur dann Null wird, wenn entweder $a = 0$ oder $a = \pm l\pi$. Diese Resultate stimmen mit den in §. 99 gefundenen überein.

Uebrigens könnte man die Formel 20) auch aus der als bekannt vorausgesetzten Formel 21) ableiten. Denn aus Form. 12) des §. 95 folgt, wenn man $x = y = a$ setzt

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$$

Nun ist nach 21)

$$\sin 2a = 2a\left(1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{4^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

$$= 2a\left(1 - \frac{2^2 a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

$$2 \sin a = 2a\left(1 - \frac{a^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so findet man das Produkt 20).

9.

Setzt man $a = \frac{m\pi}{2n}$ so erhält man aus Form. 20) und 21)

22) $$\cos \frac{m\pi}{2n} = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{3^2 n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{5^2 n^2}\right)\ldots\ldots$$

23) $$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(1 - \frac{m^2}{2^2 n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{4^2 n^2}\right)\ldots\ldots$$

Setzt man $\frac{m}{n} = 1$ so ist $\sin\frac{m\pi}{2n} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ also nach 23)

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\ldots\ldots$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\ldots\ldots}$$

Da nun allgemein

$$1 - \frac{1}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2 - 1}{2^2 k^2} = \frac{(2k - 1)(2k + 1)}{2^2 k^2}$$

so folgt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1\,.\,3} \cdot \frac{4^2}{3\,.\,5} \cdot \frac{6^2}{5\,.\,7} \cdot \frac{8^2}{7\,.\,9} \cdot \ldots\ldots$$

oder

24) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots\ldots$$

Dieses merkwürdige Produkt, vermittelst dessen man die Zahl $\pi$ berechnen kann, nennt man das Wallis'sche, nach dem englischen Mathematiker Wallis (gest. 1703) der es zuerst gefunden hat.

Setzt man in 23) statt $\frac{m}{n}$ den Werth $\frac{1}{2}$ so ist

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2^2\,.\,4}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2\,.\,4}\right)\ldots\ldots$$

Da nun allgemein $1 - \frac{1}{(2k)^2\,.\,4} = \frac{(2^2k - 1)(2^2k + 1)}{4^2 k^2}$ ist,

so folgt

25) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{8\,.\,8}{7\,.\,9} \cdot \frac{12\,.\,12}{11\,.\,13} \cdot \ldots\ldots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{8\,.\,8}{7\,.\,9} \cdot \frac{12\,.\,12}{11\,.\,13} \cdot \ldots\ldots$$

also

$$\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 12} \cdots\cdots$$

setzt man nun statt $\frac{\pi}{2}$ seinen Werth aus 24) so ergiebt sich hieraus

26) $$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdots\cdots$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ so ist $\sin \frac{m\pi}{2n} = \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ $= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (§. 110). Demnach folgt aus 23)

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2 \cdot 3^2}\right) \cdots\cdots$$

oder wenn man mit 3 multiplicirt

27) $$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdots\cdots$$

Man sieht aus dem Vorhergehenden, wie man, sobald für irgend einen Werth von $\frac{m\pi}{2n}$ der Werth des Sinus bekannt ist, vermittelst der Formel 23) einen Werth von $\frac{\pi}{2}$ finden kann.

Aus $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ folgt $\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

also wenn man in 22) statt $\frac{m}{n}$ den Werth $\frac{1}{3}$ setzt,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2 \cdot 3^2}\right) \cdots\cdots$$

woraus

28) $$\sqrt{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \frac{14 \cdot 16}{15 \cdot 15} \cdots\cdots$$

folgt.

Setzt man $m = 2$ und dann $m = 1$ so folgt aus 23)

$$\sin \frac{2\pi}{2n} = \frac{2\pi}{2n}\left(1 - \frac{2^2}{2^2 n^2}\right)\left(1 - \frac{2^2}{4^2 n^2}\right) \cdots\cdots$$

$$\sin \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\left(1 - \frac{1}{2^2 n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 n^2}\right) \cdots\cdots$$

nun ist $\sin\frac{2\pi}{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}$

also

$$29)\quad \cos\frac{\pi}{2n} = \frac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2^2n^2-2^2}{2^2n^2-1}\cdot\frac{4^2n^2-2^2}{4^2n^2-1}\cdot\frac{6^2n^2-2^2}{6^2n^2-1}\cdots$$

Setzt man in dieser Formel $n = 3$ so findet man ein anderes Produkt für $\sqrt{3}$ nemlich

$$30)\quad \sqrt{3} = 2\cdot\frac{4\,.\,8}{5\,.\,7}\cdot\frac{10\,.\,14}{11\,.\,13}\cdot\frac{16\,.\,18}{17\,.\,19}\cdots\cdots$$

Setzt man $n = 2$ so findet man wieder die Formel 26).

Aus §. 138 folgt übrigens, dass man jedes der gefundenen Produkte in eine gleichgeltende Reihe verwandeln kann, sowie in einen Kettenbruch (§. 160).

## 10.

Da die Formeln 35) und 36) des §. 122 u. 123 ihre Geltung auch noch behalten, wenn man $ai$ statt $a$ setzt (§. 129), so behalten auch, wie leicht zu zeigen ist, die oben gefundenen Formeln 20) und 21) noch in diesem Falle ihre Geltung. Da nemlich das $x$ in Formel 2) ganz unbestimmt ist, so muss, was auch $x$ bedeute, die Multiplikation der darin vorkommenden Faktoren wieder die Reihe der Formel 1) geben. Setzt man aber $x = (\sin ai)^2$, so geht diese Reihe in $\cos nai$ über, und man hat daher auch

$$31)\quad \cos ai = \left[1 - \frac{\left(\sin\frac{ai}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin\frac{ai}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right]\cdots\left[1 - \frac{\left(\sin\frac{ai}{n}\right)^2}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Nun ist (§. 127 Form. 59)

$$\frac{\sin ai}{a} = i\left(1 + \frac{a^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots\right)$$

also bei unbegrenzt abnehmendem $a$

$$\lim\left(\frac{\sin ai}{a}\right) = i$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die in §. 5 dieser Note aus-

geführte Entwickelung wiederholt, bei unbegrenzt wachsendem $n$,

$$lim \left[\frac{sin \frac{ai}{n}}{sin \frac{k\pi}{2n}}\right] = i \,.\, ai \,.\, \frac{2}{k\pi} = -\frac{2a}{k\pi}$$

und daher

$$lim \left[1 - \frac{(sin \frac{ai}{n})^2}{(sin \frac{k\pi}{2n})^2}\right] = 1 + \frac{2^2 a^2}{k^2 \pi^2}$$

Theilt man nun wieder das Produkt 31) in zwei Faktoren

$$P = \left[1 - \frac{(sin \frac{ai}{n})^2}{(sin \frac{\pi}{2n})^2}\right] \cdots\cdots \left[1 - \frac{(sin \frac{ai}{n})^2}{(sin \frac{k\pi}{2n})^2}\right]$$

$$P^1 = \left[1 - \frac{(sin \frac{ai}{n})^2}{(sin \frac{(k+2)\pi}{2n})^2}\right] \cdots\cdots\cdots$$

so ist klar, dass bei unbegrenzt wachsendem $n$

$$P = \left[1 + \frac{2^2 a^2}{\pi^2}\right]\left[1 + \frac{2^2 a^2}{3^2 \pi^2}\right] \cdots\cdots \left[1 + \frac{2^2 a^2}{k^2 \pi^2}\right]$$

ist, und es ist daher nur noch $lim\, P^1$ zu bestimmen, was in ähnlicher Weise wie im früheren Falle geschehen kann. Aus

$$\frac{sin\, vi}{vi} = 1 + \frac{v^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{v^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \cdots$$

folgt nemlich $\frac{sin\, vi}{vi} > 1$. Ist aber $v \leqq 1$ also $\frac{sin\, vi}{vi} \leqq 1 + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \cdots$ so ist auch $\frac{sin\, vi}{vi} < e$ (§. 79). Ist nun $v + v^1 > v$ und zugleich $< \frac{\pi}{2}$, so ist $\frac{sin\,(v+v^1)}{v+v^1} < 1$, wie oben bewiesen wurde, also auch $\frac{sin\,(v+v^1)}{v+v^1} < \frac{sin\, vi}{vi}$ oder

$$\frac{\sin vi}{i \cdot \sin (v + v^1)} > \frac{v}{v + v^1}$$

zugleich ist $\frac{v + v^1}{\sin (v + v^1)} < \frac{\pi}{2}$ also

$$\frac{\sin vi}{vi} \cdot \frac{v + v^1}{\sin (v + v^1)} < e \cdot \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\frac{\sin vi}{i \cdot \sin (v + v^1)} < \frac{v}{v + v^1} \cdot \frac{e\pi}{2}$$

Ist also $v \leqq 1$, $v + v^1 < \frac{\pi}{2}$ so hat man

$$\frac{-(\sin vi)^2}{[\sin (v + v^1)]^2} > \frac{v^2}{(v + v^1)^2}$$
$$< \frac{v^2}{(v + v^1)^2} \cdot \frac{e^2 \pi^2}{2^2}$$

und

$$1 - \frac{(\sin vi)^2}{[\sin (v + v^1)]^2} > 1 + \frac{v^2}{(v + v^1)^2}$$
$$< 1 + \frac{v^2}{(v + v^1)^2} \cdot \frac{e^2 \pi^2}{2^2}$$

Ist also $\frac{a}{n} < 1$ und zugleich $\frac{a}{n} < \frac{(k + 2)\pi}{2n}$, $n > k + 2$,

so folgt

$$1 - \frac{(\sin \frac{ai}{n})^2}{(\sin \frac{(k+2)\pi}{2n})^2} > 1 + \frac{2^2 a^2}{(k + 2)^2 \pi^2}$$
$$< 1 + \frac{e^2 a^2}{(k + 2)^2}$$

Hieraus ergiebt sich dass $P^1$ zwischen den zwei Produkten

$$\left[1 + \frac{2^2 a^2}{(k + 2)^2 \pi^2}\right] \left[1 + \frac{2^2 a^2}{(k + 4)^2 \pi^2}\right] \cdots\cdots$$

und

$$\left[1 + \frac{e^2 a^2}{(k + 2)^2}\right] \left[1 + \frac{e^2 a^2}{(k + 4)^2}\right] \cdots\cdots$$

liegt, welche sich unbegrenzt der Einheit nähern, also $\lim P^1 = 1$ und daher

32) $$\cos ai = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \left[1 + \frac{2^2a^2}{\pi^2}\right]\left[1 + \frac{2^2a^2}{3^2\pi^2}\right]\left[1 + \frac{2^2a^2}{5^2\pi^2}\right] \ldots\ldots$$

Ebenso findet man

33) $$\frac{\sin ai}{i} = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = a\left[1 + \frac{a^2}{\pi^2}\right]\left[1 + \frac{a^2}{2^2\pi^2}\right]\left[1 + \frac{a^2}{3^2\pi^2}\right] \ldots\ldots$$

## 11.

Setzt man in Formel 39) des §. 126, $(\cos a)^2 = x$ so kann man statt derselben

$$\pm \cos na = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

schreiben, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ in der Form $4k$ oder $4k + 2$ enthalten ist. Nach §. 2 dieser Note hat man also

$$\pm \cos na = a_{\frac{n}{2}} \left[x - (\cos \frac{\pi}{2n})^2\right]\left[x - (\cos \frac{3\pi}{2n})^2\right] \ldots \left[x - (\cos \frac{(n-1)\pi}{2n})^2\right]$$

Es ist aber wieder $a_{\frac{n}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n^2(n^2 - 2^2) \ldots (n^2 - (2k-2)^2)}{1 \;.\; 2 \;.\;.\;.\; 2k}$,

also, wie dort bewiesen wurde, $a_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} = \pm 2^{n-1}$,

wo ebenfalls das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $n = 4k$ oder $4k + 2$ ist, also jedenfalls

34) $$\cos na = 2^{n-1} \left[x - (\cos \frac{\pi}{2n})^2\right] \ldots \left[x - (\cos \frac{(n-1)\pi}{2n})^2\right]$$

Ist $n$ ungerade, so ist (§. 126 F. 42)

$$\pm \frac{\cos na}{n \cos a} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 \ldots + d_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $n = 4k + 1$ oder $n = 4k + 3$. Hier ist

$$d_{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n^2-1)\,(n^2-3) \ldots (n^2-(n-2)^2)}{1 \;.\; 2 \;.\;.\;.\; n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

also, nach §. 4 dieser Note, $d_{\frac{n-1}{2}} = \frac{2^{n-1}}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$

und demnach

35) $$\frac{\cos na}{\cos a} = 2^{n-1} \left[x - (\cos \frac{\pi}{2n})^2\right] \ldots \left[x - (\cos \frac{(n-2)\pi}{2n})^2\right]$$

Ist $n$ gerade, so giebt Form. 40 des §. 125

$$\mp \frac{\sin na}{n \sin a \cos a} = 1 + a_1 x + \ldots + a_{\frac{n-2}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $n = 4k$ oder $4k + 2$. Nun ist

$$a_{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n^2 - 2^2) \ldots (n^2 - (n-2)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)},$$

also, nach §. 2 dieser Note,

$a_{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2^{n-1}}{n} = \mp \frac{2^{n-1}}{n}$, wo wieder das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n = 4k$ oder $= 4k + 2$, also nach §. 4 dieser Note

36) $$\frac{\sin na}{\sin a \cos a} = 2^{n-1} \left[x - (\cos \frac{2\pi}{2n})^2\right] \left[x - (\cos \frac{4\pi}{2n})^2\right] \ldots \left[x - (\cos \frac{(n-2)\pi}{2n})^2\right]$$

Ist $n$ ungerade, so folgt aus §. 125 F. 41

$$\pm \frac{\sin na}{\sin a} = 1 + b_1 x + \ldots + b_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n = 4k + 1$ oder $4k + 3$ und

$$b_{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 3^2) \ldots (n^2 - (n-2)^2)}{1 \cdot 2 \ldots n - 1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}$$

(nach §. 3 dieser Note) $= \pm 2^{n-1}$

Demnach ist

$$37)\quad \frac{\sin na}{\sin a} = 2^{n-1}\left[x-\left(\cos\frac{2\pi}{2n}\right)^2\right]\left[x-\left(\cos\frac{4\pi}{2n}\right)^2\right]\ldots\left[x-\left(\cos\frac{n-1.\pi}{2n}\right)^2\right]$$

Man kann die Formeln 34) und 35) in eine einzige zusammenziehen, und ebenso die Formeln 36) und 37). Da nemlich $x = (\cos a)^2$ so hat man

$$x - \left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2 = \left(\cos a - \cos\frac{k\pi}{2n}\right)\left(\cos a + \cos\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Nun ist $\cos\frac{k\pi}{2n} = -\cos\frac{(2n-k)\pi}{2n}$ (§. 99, 28), also

$$x - \left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2 = \left(\cos a - \cos\frac{k\pi}{2n}\right)\left(\cos a - \cos\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)$$

Setzt man also für $k$ allmälich die Zahlen $1, 3 \ldots. n-1$ so erhält man aus 34)

$$38)\quad \cos na = 2^{n-1}\left[\cos a - \cos\frac{\pi}{2n}\right].\left[\cos a - \cos\frac{3\pi}{2n}\right]\ldots.$$
$$\left[\cos a - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$

Aus 35) folgt ebenso

$$\frac{\cos na}{\cos a} = 2^{n-1}\left[\cos a - \cos\frac{\pi}{2n}\right]\left[\cos a - \cos\frac{3\pi}{2n}\right]\ldots.$$
$$\left[\cos a - \cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]\left[\cos a - \cos\frac{(n+2)\pi}{2n}\right]\ldots\left[\cos a - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$

Diese Reihe müsste, um vollständig zu seyn, noch das Glied $\cos a - \cos\frac{n\pi}{2n}$ enthalten, da $n$ eine ungerade Zahl ist; da aber $\cos\frac{n\pi}{2n} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ so ist $\cos a - \cos\frac{n\pi}{2n} = \cos a$ und mithin mit 38) übereinstimmend auch in diesem Falle

$$\cos na = 2^{n-1}\left[\cos a - \cos\frac{\pi}{2n}\right]\ldots\left[\cos a - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$

Da auch $\cos\frac{k\pi}{n} = -\cos\frac{(n-k)\pi}{n}$ so folgt vermittelst derselben Betrachtungen aus 37)

$$39)\quad \frac{\sin na}{\sin a} = 2^{n-1}\left[\cos a - \cos\frac{\pi}{n}\right]\left[\cos a - \cos\frac{2\pi}{n}\right]\ldots.$$
$$\left[\cos a - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

Dieselbe Formel erhält man aus 36) wenn man bedenkt, dass man nun, insofern $n$ gerade ist, statt $\cos a$ auch $\cos a - \cos\frac{\frac{n}{2}\pi}{n}$ setzen kann.

Setzt man in 38) $a=0$ und mithin $\cos a = 1$, $\cos na = 1$ so folgt

$$1 = 2^{n-1}\left[1-\cos\frac{\pi}{2n}\right]\left[1-\cos\frac{3\pi}{2n}\right]\ldots\left[1-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$

Man hat daher auch

$$40)\quad \cos na = \frac{\cos a - \cos\frac{\pi}{2n}}{1-\cos\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\cos a - \cos\frac{3\pi}{2n}}{1-\cos\frac{3\pi}{2n}}\cdots\frac{\cos a - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}}$$

Nach §. 118 ist $\frac{\sin na}{\sin a} = n$ wenn $a = 0$, demnach giebt die Formel 39)

$$n = 2^{n-1}\left[1-\cos\frac{\pi}{n}\right]\left[1-\cos\frac{2\pi}{n}\right]\ldots\left[1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

und

$$41)\quad \frac{\sin na}{n\sin a} = \left[\frac{\cos a - \cos\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}\right]\left[\frac{\cos a - \cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}\right]\ldots\left[\frac{\cos a - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}\right]$$

Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich leicht noch andere finden, in ähnlicher Weise, wie es oben §. 2 ff. geschehen ist. Da indessen die Ableitung keine Schwierigkeit hat, so übergehe ich dieselben, und will nur beispielsweise noch folgende entwickeln.

Setzt man in 34) statt $a$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ so ist $x=0$, also

$$\cos\frac{n\pi}{2} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\cos\frac{3\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

Da nun sowohl $\cos\frac{n\pi}{2}$ als $(-1)^{\frac{n}{2}}$ den Werth $+1$ oder den Werth $-1$ hat, je nachdem $n=4k$ oder $4k+2$ ist, so folgt

$$42)\quad 1 = 2^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\cos\frac{3\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

und demnach kann man statt 34) auch schreiben

$$\cos na = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[1-\frac{x}{\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\left[1-\frac{x}{\left(\cos\frac{3\pi}{2n}\right)^2}\right]\ldots\left[1-\frac{x}{\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2}\right]$$

Unter derselben Voraussetzung erhält man aus 36), wenn $n > 2$

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = 2^{n-1}\,.\,(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\cos\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\cos\frac{4\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2.$$

Nun ist, da $n$ eine gerade Zahl, $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ also erscheint $\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ in der Form $\frac{0}{0}$. Nach Formel 36) des §. 123 findet sich jedoch

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = n - \frac{n(n^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \ldots\ldots$$

Aus Formel 40) folgt aber, wenn man dort $a = 0$ setzt

$$\mp\frac{\sin na}{\sin a} = n - \frac{n(n^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\ldots\ldots$$

und zwar gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $n = 4k$ oder $4k+2$. Da nun andererseits bekannt ist, dass für $a = 0$

$$\frac{\sin na}{\sin a} = n$$

so ist

$$\mp n = (-1)^{\frac{n-2}{2}}n = n - \frac{n(n^2-2^2)}{1.2.3} + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\ldots.$$

also auch

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot n$$

und

43) $$n = 2^{n-1} \left(\cos \frac{2\pi}{2n}\right)^2 \cos\left(\frac{4\pi}{2n}\right)^2 \ldots\ldots \left(\cos \frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

Dividirt man die Formel 5) dieser Note durch die Formel 42) so findet man für ein gerades $n$

44) $$\left(tg \frac{\pi}{2n}\right)^2 \cdot \left(tg \frac{3\pi}{2n}\right)^2 \ldots\ldots \left(tg \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 = 1$$

Ebenso giebt die Verbindung der Formel 12) mit der Formel 43), wenn $n > 2$

45) $$\left(tg \frac{2\pi}{2n}\right)^2 \left(tg \frac{4\pi}{2n}\right)^2 \ldots \left(tg \frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2 = 1$$

Die letzten Formeln und ähnliche kann man auch unmittelbarer finden, wenn man die im Anfange des §. 118 entwickelte Formel benutzt, indem man nur $tg\, a$ statt $\frac{\sin a}{\cos a}$ setzt. Man hat demnach

$$(1 + tg\, a . i)^n = 1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, tg\, a . i + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, (tg\, a)^2 (i)^2 \ldots + {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}\, (tg\, a)^n i^n$$

Andererseits ist $(1 + tg\, a . i)^n = \left(\frac{\cos a + \sin a . i}{\cos a}\right)^n = \frac{\cos na + \sin na . i}{(\cos a)^n}$

Ist $n$ eine gerade Zahl, so ist mithin

$$\frac{\cos na}{(\cos a)^n} = 1 - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, (tg\, a)^2 \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} (tg\, a)^n$$

und wenn man $(tg\, a)^2 = x$ setzt,

$$\frac{\cos na}{(\cos a)^n} = 1 - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, x \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

Nach §. 2 dieser Note hat man also

46) $$\frac{\cos na}{(\cos a)^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[x - \left(tg \frac{\pi}{2n}\right)^2\right] \left[x - \left(tg \frac{3\pi}{2n}\right)^2\right] \ldots\ldots \left[x - \left(tg \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2\right]$$

Setzt man $a=0$ so findet man wieder die Form. 44); auch ist

$$\frac{\cos na}{(\cos a)^n}=\left[1-\frac{(tg\ a)^2}{(tg\frac{\pi}{2n})^2}\right]\left[1-\frac{(tg\ a)^2}{(tg\frac{3\pi}{2n})^2}\right]\ldots\left[1-\frac{(tg\ a)^2}{(tg\frac{(n-1)\pi}{2n})^2}\right]$$

Ferner

$$\frac{\sin na}{(\cos a)^n}={}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,tg\ a-{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}\,(tg\ a)^3\ldots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\,{}_{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,(tg\ a)^{n-1}$$

woraus

$$\frac{\sin na}{(\cos a)^n\,tg\ a}={}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}-{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}\,x^2\ldots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\,{}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,x^{n-2}$$

also nach §. 3 dieser Note

$$\frac{\sin na}{(\cos a)^{n-1}\sin a}=\frac{\sin na}{(\cos a)^n\ tg\ a}$$

$$=(-1)^{\frac{n-2}{2}}\,n\left[x-(tg\frac{2\pi}{2n})^2\right]\left[x-(tg\frac{4\pi}{2n})^2\right]\ldots\left[x-(tg\frac{(n-2)\pi}{2n})^2\right]$$

Setzt man $a=0$ so ist $\frac{\sin na}{(\cos a)^n tg\ a}=\frac{\sin na}{\sin a}\cdot\frac{\cos a}{(\cos a)^n}=n$ und $x=0$, wodurch man die Formel 45) erhält.

Aehnliche Formeln erhält man für ein ungerades $n$.

12.

Die meisten der im Vorhergehenden gefundenen Formeln lassen sich noch in manche andere Form umwandeln. Man nehme z. B. die Formel

$$\cos na=(-1)^{\frac{n}{2}}\,2^{n-1}\left[x-(\sin\frac{\pi}{2n})^2\right]\ldots\left[x-(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})^2\right]$$

die für ein gerades $n$ gilt und in §. 2 dieser Note bewiesen ist, oder einfacher

$$\cos na=2^{n-1}\left[(\sin\frac{\pi}{2n})^2-x\right]\left[(\sin\frac{3\pi}{2n})^2-x\right]\ldots\left[(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n})^2-x\right]$$

Hier ist $x=(\sin a)^2$. Nun ist aber (§. 100)

$$1-2(\sin u)^2=\cos 2u$$
$$1-2(\sin v)^2=\cos 2v$$

also

$(\sin v)^2 - (\sin u)^2 = \frac{\cos 2u - \cos 2v}{2}$. Demnach hat man

$$(\sin \frac{\pi}{2n})^2 - (\sin a)^2 = \frac{(\cos 2a - \cos \frac{\pi}{n})}{2}$$

$$(\sin \frac{3\pi}{2n})^2 - (\sin a)^2 = \frac{(\cos 2a - \cos \frac{3\pi}{n})}{2}$$

. . . . . . . . . . . . . .

also

47) $\cos na = 2^{\frac{n-2}{2}} (\cos 2a - \cos \frac{\pi}{n}) (\cos 2a - \cos \frac{3\pi}{n}) \ldots$
$(\cos 2a - \cos \frac{(n-1)\pi}{n})$

Für ein ungerades $n$ folgt ebenso aus §. 3 dieser Note

48) $\frac{\cos na}{\cos a} = 2^{\frac{n-1}{2}} (\cos 2a - \cos \frac{\pi}{n}) (\cos 2a - \cos \frac{3\pi}{n}) \ldots.$
$(\cos 2a - \cos \frac{(n-2)\pi}{n})$

Ferner aus §. 4, wenn man bedenkt, dass aus §. 95 Form. 12), indem man $x = y = a$ setzt,

$$\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$$

folgt, ergiebt sich für ein gerades $n$

49) $\frac{\sin na}{\sin 2a} = 2^{\frac{n-2}{2}} (\cos 2a - \cos \frac{2\pi}{n}) (\cos 2a - \cos \frac{4\pi}{n}) \ldots.$
$(\cos 2a - \cos \frac{(n-2)\pi}{n})$

und für ein ungerades $n$

50) $\frac{\sin na}{\sin a} = 2^{\frac{n-1}{2}} (\cos 2a - \cos \frac{2\pi}{n}) (\cos 2a - \cos \frac{4\pi}{n}) \ldots.$
$(\cos 2a - \cos \frac{(n-1)\pi}{n})$

Aus §. 100 ergiebt sich auch die Formel

$$\cos u^2 - \cos v^2 = \frac{\cos 2u - \cos 2v}{2}$$

Wendet man dieselbe auf Formel 34) an, so findet man wieder 47), ebenso folgt 48) aus 35), ferner 49) aus 36) und 50) aus 37).

### 13.

Wir fanden früher (§. 117 Form. 14)

$$\cos (x-y) - \cos (x+y) = 2 \sin x \sin y$$

Man setze nun $x-y=2a$, $x+y=\frac{\pi}{n}$ so folgt $x=\frac{\pi}{2n}+a$, $y=\frac{\pi}{2n}-a$, demnach

$$\cos 2a - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin (\frac{\pi}{2n}+a) \sin (\frac{\pi}{2n}-a)$$

$$\cos 2a - \cos \frac{3\pi}{n} = 2 \sin (\frac{3\pi}{2n}+a) \sin (\frac{3\pi}{2n}-a)$$

u. s. w.

Wendet man dies auf die Formeln 47) und 48) an, so ergiebt sich, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist,

$$\cos na = 2^{n-1} \sin (\frac{\pi}{2n}+a) \sin (\frac{\pi}{2n}-a) \sin (\frac{3\pi}{2n}+a) \sin (\frac{3\pi}{2n}-a) \dots$$
$$\sin (\frac{(n-1)\pi}{2n}+a) \sin (\frac{(n-1)\pi}{2n}-a)$$

$$\frac{\cos na}{\cos a} = 2^{n-1} \sin (\frac{\pi}{2n}+a) \sin (\frac{\pi}{2n}-a) \sin (\frac{3\pi}{2n}+a) \sin (\frac{3\pi}{2n}-a) \dots$$
$$\sin (\frac{(n-2)\pi}{2n}+a) \sin (\frac{(n-2)\pi}{2n}-a)$$

und aus 49) und 50) folgt

$$\frac{\sin na}{\sin 2a} = 2^{n-2} \sin (\frac{\pi}{n}+a) \sin (\frac{\pi}{n}-a) \sin (\frac{2\pi}{n}+a) \sin (\frac{2\pi}{n}-a) \dots$$
$$\sin (\frac{(n-2)\pi}{2n}+a) \sin (\frac{(n-2)\pi}{2n}-a)$$

$$\frac{\sin na}{\sin a} = 2^{n-1} \sin (\frac{\pi}{n}+a) \sin (\frac{\pi}{n}-a) \sin (\frac{2\pi}{n}+a) \sin (\frac{2\pi}{n}-a) \dots$$
$$\sin (\frac{(n-1)\pi}{2n}+a) \sin (\frac{(n-1)\pi}{2n}-a)$$

## Note VII.

### 1.

Sey $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots.$ eine Reihe, welche convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, man bezeichne ihren Werth durch $z$ so hat man

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^r}{1.2\ldots r} + \ldots$$

Nach §. 31 und §. 56 ist aber

$$(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m = x^m (a_1 + a_2 x + \ldots)^m$$

$$= {}^{m}\overset{m}{Cp}.x^m + {}^{m+1}\overset{m}{Cp}.x^{m+1} + \ldots$$

und dem gemäss erhält man die Doppelreihe

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = 1$$

$$+ \left({}^{1}\overset{1}{Cp}.x + {}^{2}\overset{1}{Cp}.x^2 + \ldots + {}^{r}\overset{1}{Cp}.x^r + \ldots\right)$$

$$+ \left(\frac{{}^{2}\overset{2}{Cp}.x^2}{1.2} + \ldots + \frac{{}^{r}\overset{2}{Cp}.x^r}{1.2} + \ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

indem man in dem Werthe von $e^z$ statt $z$ überall die Reihe $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$ setzt, und die Potenzen entwickelt. Da nun jede Horizontalreihe der Doppelreihe und auch deren Summe convergent ist, so hat man auch, indem man die Verticalreihen addirt (§. 51)

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = 1 + {}^{1}\overset{1}{Cp}.x + \left({}^{2}\overset{1}{Cp} + \frac{{}^{2}\overset{2}{Cp}}{1.2}\right) x^2 + \ldots$$

$$+ \left({}^{r}\overset{1}{Cp} + \frac{{}^{r}\overset{2}{Cp}}{1.2} + \ldots\right) x^r + \ldots.$$

Zu dem Gliede dieser Reihe, welches $x_r$ enthält, giebt jeder der Ausdrücke $z$, $\frac{z^2}{1.2}$ u. s. w. bis $\frac{z^r}{1.2\ldots r}$ einen Beitrag. Nimmt man aber aus $\frac{z^k}{1.2\ldots k} = \frac{1}{1.2\ldots k}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^k$ das $r$te Glied, so ist dies $\frac{1}{1.2\ldots k}\,{}^{r}\overset{k}{Cp}.x^r$; setzt man also

$$1)\quad e^{a_1x+a_2x^2+\dots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_r x^r + \dots$$

so ist $A_r = \sum\limits_{1,r}^{k} \frac{{}^{r}\overset{k}{C}p}{1\,.\,2\,\dots\,k}$. Hiermit ist die independente Formel (§. 25) für die Entwickelung von $e^{a_1x+a_2x^2+\dots}$ in eine nach Potenzen von $x$ fortlaufende Reihe gefunden. Aus derselben lässt sich nun auch leicht eine recurrirende Formel ableiten. Wenn man nemlich in §. 18 Form. 12 statt $m+1$ den Werth $k$ setzt, so kann man dieselbe offenbar in folgender Gestalt schreiben

$$\frac{{}^{r}\overset{k}{C}p}{1\,.\,2\,.\,.\,k} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,(k-1)}\left[\frac{a_1\,{}^{r-1}\overset{k-1}{C}p + 2a_2\,{}^{r-2}\overset{k-1}{C}p + \dots}{r}\right]$$

Setzt man in dieser Formel allmälich statt $k$ alle Werthe von 2 bis $r$ so erhält man

$$\frac{{}^{r}\overset{2}{C}p}{1\,.\,2} = \frac{1}{1}\left[\frac{a_1\,{}^{r-1}\overset{1}{C}p + 2a_2\,{}^{r-2}\overset{1}{C}p \dots + (r-1)\,a_{r-1}\,{}^{1}\overset{1}{C}p}{r}\right]$$

$$\frac{{}^{r}\overset{3}{C}p}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1\,{}^{r-1}\overset{2}{C}p + 2a_2\,{}^{r-2}\overset{2}{C}p + \dots + (r-2)\,a_{r-2}\,{}^{2}\overset{2}{C}p}{r}\right]$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{{}^{r}\overset{r}{C}p}{1\,.\,2\dots r} = \frac{1}{1\,.\,2\dots(r-1)}\;\frac{a_1\,{}^{r-1}\overset{r-1}{C}p}{r}\;\dots\,,$$

Addirt man noch auf der linken Seite ${}^{r}\overset{1}{C}p$ und auf der rechten dessen Werth $a_r = \frac{ra_r}{r}$ und zählt dann auf beiden Seiten alle Ausdrücke zusammen, indem man die mit $a_1$ multiplicirten, ebenso die mit $a_2$ multiplicirten u. s. w. zusammenstellt, so findet man

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{{}^{r}\overset{k}{C}p}{1\,.\,2\dots k} = \frac{a_1 \sum\limits_{1,r-1}^{k} \frac{{}^{r-1}\overset{k}{C}p}{1\,.\,2\dots k} + 2a_2 \sum\limits_{1,r-2}^{k} \frac{{}^{r-2}\overset{k}{C}p}{1\,.\,2\dots k} + \dots + ra_r}{r}$$

d. h.

$$2)\qquad A_r = \frac{a_1 A_{r-1} + 2a_2 A_{r-2} + \ldots + ra_r}{r}$$

welches die gesuchte recurrirende Formel ist.

Es wurde hier durch ein bestimmtes Verfahren der Ausdruck $e^{a_1x+a_2x^2+\ldots}$ in eine convergirende nach den aufsteigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe verwandelt. Welches andere Verfahren man aber zu diesem Zwecke anwenden mag, man wird immer dieselbe Reihe finden. Gesetzt nemlich man habe durch irgend ein anderes Verfahren

$$e^{a_1x+a_2x^2+\ldots} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_r x^r + \ldots$$

gefunden, so hat man also für alle Werthe von $x$, für welche $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ convergirt, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt*),

$$1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_rx^r+\ldots=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_rx^r+\ldots$$

Setzt man nun $x=0$ so ist $B_0=e^0=1$ mithin

$$A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_r x^r + \ldots = B_1 x + B_2 x^2 \ldots + B_r x^r + \ldots$$

oder

$$A_1 + A_2 x + \ldots + A_r x^{r-1} + \ldots = B_1 + B_2 x \ldots + B_r x^{r-1}$$

und setzt man $x=0$ so folgt

$$A_1 = B_1$$

Auf dieselbe Weise findet man $A_2 = B_2$ und allgemein $A_r = B_r$; die beiden Reihenentwickelungen müssen also identisch seyn.

## 2.

Findet die Gleichung 1) statt, so folgt

$$3)\qquad log(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

Sind die Coefficienten $A_1$, $A_2 \ldots$ bekannt, so ergiebt sich zwischen den Coefficienten $a_1$, $a_2 \ldots a_r$ vermittelst Formel 2) sofort die Recursionsformel

$$4)\qquad a_r = \frac{rA_r - a_1 A_{r-1} - 2a_2 A_{r-2} \ldots - (r-1)\, a_{r-1} A_1}{r}$$

---

*) also namentlich für alle Werthe von $x$, die so klein sind, dass $\frac{a_r x}{a_{r-1}} < 1$

Um die Formel zu finden, welche $a_r$ auf independentem Wege aus $A_1$, $A_2 \ldots A_r$ finden lehrt, nehme man $x$ so klein, dass $A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$, auch wenn man alle Glieder positiv nimmt, kleiner als die Einheit ist. Setzt man nemlich dann $A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = y$, so ist $log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots$ und wenn man in dieser Entwickelung statt $y$ wieder seinen Werth setzt, so folgt, wenn man nun das Combinationszeichen auf die Elemente $A_1$, $A_2 \ldots$ bezieht,

$$y = \overset{1}{{}^1Cp}.x + \overset{1}{{}^2Cp}.x^2 + \overset{1}{{}^3Cp}.x^3 + \ldots + \overset{1}{{}^rCp}.x^r + \ldots$$

$$-\frac{1}{2}y^2 = \quad -\frac{1}{2}\overset{2}{{}^2Cp}.x^2 \;\ldots\; -\frac{1}{2}\overset{2}{{}^rCp}.x^r - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{r-1}\frac{1}{r}y^r = \quad (-1)^{r-1}\frac{1}{r}\overset{r}{{}^rCp}.x^r - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man hat also eine Doppelreihe, bei welcher nicht blos alle Horizontalreihen convergiren, sondern auch deren Summe, selbst wenn man alle Glieder positiv nimmt, da die Reihe $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \ldots$ convergirt, wenn $y$ positiv und kleiner als die Einheit ist. Mithin hat man, wenn man die Verticalreihen addirt,

$$log(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots) = \overset{1}{{}^1Cp}\,x + (\overset{1}{{}^2Cp} - \frac{1}{2}\overset{2}{{}^2Cp})x^2 + \ldots$$

Das $r$te Glied in dieser Entwickelung ist nach dem Vorhergehenden

$$(\overset{1}{{}^rCp} - \frac{1}{2}\overset{2}{{}^rCp} + \frac{1}{3}\overset{3}{{}^rCp} \ldots + (-1)^{r-1}\frac{1}{r}\overset{r}{{}^rCp})x^r$$

also

$$5) \qquad a_r = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}\overset{k}{{}^rCp}$$

wodurch $a_r$ auf independentem Wege gefunden ist. Diese Formel beruht freilich auf einer bestimmten Voraussetzung, die über den Werth der Reihe $A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ gemacht wurde. Allein ebenso, wie wir bewiesen haben, dass

$e^{a_1x+a_2x^2+\dots}$ nur auf eine einzige Weise in eine nach aufsteigenden Potenzen von $x$ geordnete. Reihe entwickelt werden kann, können wir auch beweisen, dass dies bei der Entwickelung von $log\ (1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$ der Fall ist. Welches Verfahren man also anwenden mag um $a_r$ auf independentem Wege zu finden, man wird immer die Formel 5) finden. Nun kann man aber eine independente Formel für $a_r$ auch dadurch finden, dass man von $a_1 = A_1$ ausgehend, vermittelst der recurrirenden Formel allmälich $a_2, a_3 \dots a_r$ durch $A_1, A_2 \dots A_r$ ausdrückt. Der so gefundene Werth von $a_r$ muss also mit Formel 5) übereinstimmen. Da aber die Formel 4) immer statt hat, sobald die Gleichung 3) statt hat, so gilt dies auch von der Formel 5).

3.

Das Vorhergehende führt zu verschiedenen interessanten Anwendungen. Ist $x < 1$, so ist (§. 84)

$$log\ (1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots\dots$$

$$- log\ (1 - x) = log\ \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

und mithin

$$e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (\S.\ 55)$$

Mit der Formel 1) verglichen ist hier $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} \dots$ $a_r = \frac{1}{r}$ und $A_1 = A_2 = \dots = A_r = 1$, auch convergirt $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ selbst wenn man alle Glieder positiv nimmt. Folglich ist

$$6) \qquad A_r = 1 = \sum_{1,r}^{k} \frac{rC\overset{k}{p}}{1 \cdot 2 \dots k}$$

wo die Combinationen aus den Elementen $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} \dots$ $a_r = \frac{1}{r}$ zu bilden sind. In Worten ausgedrückt heisst dies:

wenn man aus den Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ als erstem, zweitem, drittem Elemente u. s. w. in vorgeschriebener Weise Combinationen bildet und jede Combination der $k$ten Klasse mit $1.2\ldots k$ dividirt, so ist die Summe der hieraus entstehenden Ausdrücke der Einheit gleich. Man setze z. B. $r = 3$, die Combinationen sind also aus den Elementen $a_1$, $a_2$, $a_3$ zu bilden. Nun ist ${}^3\overset{1}{C}p = a_3$; ${}^3\overset{2}{C}p = 2a_1 a_2$; ${}^3\overset{3}{C}p = a_1 a_1 a_1$ also

$$\sum_{1,3}^{k} \frac{{}^3\overset{k}{C}p}{1.2\ldots k} = a_3 + \frac{2a_1\,a_2}{1.2} + \frac{a_1 a_1 a_1}{1.2.3}$$

und indem man für $a_1$, $a_2$, $a_3$ ihre Werthe setzt, erhält man hieraus

$$\frac{1}{3} + \frac{2.1.\frac{1}{2}}{1.2} + \frac{1.1.1}{1.2.3} = 1\text{*)}$$

Ist $r$ eine Primzahl, so kommen in der durch Formel 6) ausgedrückten Summe nur zwei Glieder vor, welche $r$ im Nenner

*) Wenn man aus $\frac{{}^r\overset{k}{C}p}{1.2\ldots k}$ diejenige Form heraushebt, bei welcher das erste Element $a$ mal, das zweite $b$ mal, das dritte $c$ mal u.s.w. vorkommt, so dass also $a + 2b + 3c + \ldots = r$, so ist die zu dieser Combination gehörende Permutationszahl $\frac{1.2\ldots k}{1.2..a.1.2\ldots b.1.2\ldots.c\ldots}$ (Kap. 1 §. 9). Da aber zugleich das erste Element den Werth 1 hat, also dessen $a$fache Wiederholung ebenfalls $= 1$ ist, das zweite Element aber $= \frac{1}{2}$ und dessen $b$fache Wiederholung $\left(\frac{1}{2}\right)^b$ bedeutet u.s.w. so ist der Werth der in Rede stehenden Form

$$\frac{1}{2^b.3^c\ldots.} \cdot \frac{1.2\ldots k}{1.2\ldots a.1.2\ldots b.1.2\ldots c\ldots} \cdot \frac{1}{1.2\ldots k} = \frac{1}{2^b.3^c\ldots} \cdot \frac{1}{1.2..a.1.2..b.1.2\ldots c\ldots}$$

der in Formel 6) enthaltene Satz lässt sich daher auch in folgender Weise aussprechen: Es ist $1 = \Sigma \frac{1}{2^b\,3^c.1\ldots a.1\ldots b.1\ldots c\ldots.}$, wenn das Summenzeichen die Summe aller Ausdrücke bezeichnet, die man erhält, indem man für $a, b, c, \ldots$ solche positive Zahlen (Null inbegriffen) setzt, dass $a + 2b + 3c + \ldots.$ denselben Werth $r$ behält, welches auch dieser Werth sey. In dieser Gestalt hat Jacobi den Satz ausgesprochen (Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 22. S. 372.)

enthalten, nemlich wenn $k = 1$ ist, so ist ${}^r\overset{1}{C}p = \frac{1}{r}$ und wenn $k = r$ so ist ${}^r\overset{r}{C}p \; \frac{1}{1.2\ldots r} = \frac{1}{1.2\ldots r}$. Bezeichnet man die Summe aller übrigen in dieser Formel enthaltenen Glieder durch $s$, so ist $s$, auf seine kleinste Benennung gebracht, ein Bruch, welcher nicht den Faktor $r$ im Nenner enthält. Man hat also $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{1.2\ldots r} + s$ oder $1 - s = \frac{1}{r} + \frac{1}{1.2\ldots r}$

Hieraus folgt

$$(1-s).\ 1.2.3\ldots(r-1) = \frac{1.2\ldots(r-1)+1}{r}$$

Da nun der Ausdruck $(1-s)\ 1.2.3\ldots(r-1)$ kein Bruch mit dem Nenner $r$ seyn kann, so muss $1.2\ldots(r-1)+1$ durch $r$ theilbar seyn. D. h. das Produkt aller ganzen Zahlen, die kleiner als eine Primzahl sind, um eine Einheit vermehrt, ist durch diese Primzahl theilbar. In der höheren Zahlenlehre ist dieser Satz unter dem Namen des Wilson'schen bekannt.

Aus $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ folgt

$$e^{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots} = 1 + x$$

Mit Formel 1) verglichen ist nun $a_1 = 1$ $a_2 = -\frac{1}{2} \ldots$ $a_r = (-1)^{r-1} . \frac{1}{r}$, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 \ldots = A_r = 0$ und demnach, sobald $r > 1$

$$A_r = 0 = \sum_{1,r}^{k} \frac{{}^r\overset{k}{C}p}{1 \ldots k}$$

wo nun die Combinationen aus $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots$ als 1tem 2tem 3tem 4tem Elemente zu bilden sind.

Ebenso folgt aus $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots$ oder

$$e^{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots} = 1 - x$$

dass, sobald $r > 1$, die Formel

$$0 = \overset{k}{\underset{1,r}{\Sigma}} \frac{{}^r\overset{k}{C}p}{1 \ldots k}$$

statt hat, wo die Combinationen aus $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \ldots$ gebildet werden. Zu ähnlichen Anwendungen führt auch die Formel 5). Z. B. aus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots$$

folgt

$$\log\left(1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\right) = x$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Formel 3) so ist $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{1}{1 \,.\, 2} \ldots A_r = \frac{1}{1.2\ldots r}$ ferner $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$. Sobald also $r > 1$, hat man nach Formel 5)

$$0 = \overset{k}{\underset{1,r}{\Sigma}} (-1)^{k-1} \frac{{}^r\overset{k}{C}p}{k}$$

wo nun die Combinationen aus den Elementen $1, \frac{1}{1\,.\,2}, \frac{1}{1.2.3} \ldots$ zu bilden sind. Ist z. B. $r = 3$ so hat man

$$\overset{k}{\underset{1,3}{\Sigma}} (-1)^{k-1} \frac{{}^3\overset{k}{C}p}{k} = A_3 - \frac{2A_1A_2}{2} + \frac{A_1A_1A_1}{3} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3} = 0$$

## Note VIII.
### Zu §. 113, §. 118, §. 126.

1.

Eine **reelle Funktion** von $x$ nennt man eine Grösse, die irgendwie aus $x$, welches eine reelle Grösse bedeutet, und anderen bestimmten reellen Grössen zusammengesetzt ist. Man bezeichne eine solche Funktion durch $Fx$, setzt man $x - h$ statt $x$, so geht also $Fx$ in $F(x - h)$ über.

Man nehme nun an, die Funktion $Fx$ sey so beschaffen, dass sie für jeden Werth von $x$, welcher zwischen dem klei-

neren Werthe $x = a$ und dem grösseren $x = b$ enthalten ist, einen einzigen bestimmten endlichen Werth hat. Wenn dann noch ausserdem für alle zwischen $a$ und $b$ liegenden Werthe von $x$, indem man $h$, welches im Folgenden immer eine positive Grösse bezeichnen soll, unbegrenzt abnehmen lässt, sich $F(x-h)$ unbegrenzt $Fx$ nähert, so sagt man: die Funktion $Fx$ ist zwischen den Grenzen $a$ und $b$ eine stetige (continuirliche) Funktion von $x$, im entgegengesetzten Falle ist sie zwischen diesen Grenzen unstetig (discontinuirlich).

2.

Die Reihe

1) $$a_0 + a_1 x + a_3 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

sey zwischen den Grenzen $a$ und $b$ convergent und ihr Werth $Fx$, so wird $Fx$ zwischen diesen Grenzen eine stetige Funktion von $x$ seyn. Setzt man nemlich

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r = F_r(x)$$

$$a_{r+1} x^{r+1} + a_{r+2} x^{r+2} + \ldots = R_r(x)$$

so wird bei wachsendem $r$ der Rest $R_r x$ der convergirenden Reihe unter jeden angebbaren Werth sinken, setzt man ferner

$$F_r(x-h) = a_0 + a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \ldots + a_r(x-h)^r$$

$$R_r(x \quad h) = a_{r+1}(x-h)^{r+1} + a_{r+2}(x \quad h)^{r+2} + \ldots\ldots$$

so ist $F(x-h) = F_r(x-h) + R_r(x-h)$ der Werth der Reihe

$$a_0 + a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \ldots + a_r(x-h)^r + \ldots$$

welche ebenfalls convergirt, wenn wir voraussetzen, dass $h$ beliebig klein ist, also $x-h$, wie $x$, nicht ausserhalb der Grenzen $a$ und $b$ liegt; es wird demnach auch $R_r(x-h)$, bei wachsendem $r$, unter jeden angebbaren Werth sinken. Nun ist

2) $$Fx - F(x-h) = F_r x - F_r(x-h) + R_r x - R_r(x-h)$$

Je grösser man $r$ nimmt desto kleiner werden $R_r x$ und $R_r(x-h)$, mithin auch $R_r x - R_r(x-h)$, aber zugleich wird $F_r x - F_r(x-h)$, wie gross man immer $r$ nehmen mag, beliebig klein, sobald man $h$ beliebig klein nimmt. Denn es ist

$$F_r x - F_r(x-h) = a_1 x[1-(1-\frac{h}{x})] + a_2 x^2[1-(1-\frac{h}{x})^2] + \ldots$$
$$+ a_r x^r [1-(1-\frac{h}{x})^r]$$

Die Grössen $1-\frac{h}{x}$, $(1-\frac{h}{x})^2 \ldots (1-\frac{h}{x})^r$ nähern sich der Einheit unbegrenzt, so lange $r$ einen bestimmten, wenn auch noch so grossen Werth hat, sobald man $h$ beliebig klein nimmt. Nehmen wir $x$ positiv, so ist $1-\frac{h}{x} < 1$, $(1-\frac{h}{x})^2 < 1-\frac{h}{x}$ u.s.w. der kleinste dieser Werthe ist $(1-\frac{h}{x})^r$; ist $x$ negativ (während $h$ immer positiv gedacht wird) so ist $1-\frac{h}{x} > 1$, $(1-\frac{h}{x})^2 > 1-\frac{h}{x}$ u. s. w. also der kleinste dieser Werthe $1-\frac{h}{x}$. Da die Betrachtung im Wesentlichen für beide Fälle dieselbe bleibt, so soll im Folgenden $x$ positiv gedacht werden. Setzt man zur Abkürzung $1-\frac{h}{x} = k$ so hat man mithin

$$F_r x - F_r(x-h) = a_1 x(1-k) + a_2 x^2(1-k^2) \ldots + a_r x^r(1-k^r)$$

Man nehme nun zuerst an die Glieder der Reihe 1) seyen sämmtlich positiv so ist

$$F_r x - F_r(x-h) < (1-k^r)\,[a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_r x^r]$$
$$> (1-k)\,[a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_r x^r]$$

da $1-k^r$ der grösste, $1-k$ der kleinste unter den Werthen $1-k$, $1-k^2 \ldots 1-k^r$ ist. Da nun $a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_r x^r$ als Theil einer convergirenden Reihe einen bestimmten endlichen Werth $W$ hat, dagegen $1-k^r$, $1-k$, wenn man $h$ klein genug nimmt, unter jeden angebbaren Werth sinken, so sinken auch $(1-k^r)W$ und $(1-k)W$ unter jeden angebbaren Werth, also auch der zwischen ihnen enthaltene Werth $F_r x - F_r(x-h)$.

Enthält die Reihe 1) auch negative Glieder, so bezeichne man durch

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$$

das was aus $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$ wird wenn man alle Glieder positiv nimmt.

Nun kann allerdings die unendliche Reihe

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r + \ldots.$$

divergiren, aber die endliche Reihe

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r$$

wird, für jedes noch so grosse $r$, einen endlichen, wenn auch noch so grossen, Werth haben, welcher $W'$ heisse. Nun kann man aber, indem man $h$ beliebig klein nimmt, wie gross auch $W'$ sey, immer $(1-k)W'$ so wie $(1-k^r)W'$ beliebig klein machen, also auch $\alpha_1 x(1-k) + \alpha_2 x^2(1-k^2) \ldots + \alpha_r x^r(1-k^r)$, da dieser Ausdruck zwischen $(1-k)W'$ und $(1-k^r)W'$ enthalten ist, und um so mehr muss $a_1 x(1-k) + a_2 x^2(1-k^2) \ldots + a_r x^r(1-k^r)$, welches theils positive theils negative Glieder enthält, beliebig klein werden, wenn man $h$ beliebig klein nimmt *). Da also hiermit nachgewiesen ist, dass bei beliebig grossem $r$ und unbegrenzt abnehmendem $h$ sowohl $R_r x - R_r(x-h)$ als $F_r x - F_r(x-h)$ unter jede angebbare Grenze sinken, so folgt aus 2) dass auch $Fx - F(x-h)$ mit $h$ unbegrenzt abnimmt, also nähert sich $F(x-h)$ dem $Fx$ unbegrenzt oder $Fx$ ist eine stetige Funktion von $x$.

3.

Die Binomialreihe

$$\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r = 1 + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + \ldots.$$

convergirt (§. 64) wenn der Zahlenwerth von $x < 1$ ist und es ist demnach $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ zwischen den Grenzen $-1$ und $+1$ eine stetige Funktion von $x$. Nun ist $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ jedenfalls einem der reellen Werthe von $(1+x)^q$ gleich; wir haben aber schon (§. 65) bewiesen, dass, wenn zwei solche Werthe vorhanden sind, immer der positive zu nehmen ist. Die gegenwärtige Betrachtung führt noch leichter zu diesem Resultate. Setzt man nemlich $x=0$, so ist $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r = 1$ also dem po-

*) Eine ähnliche Betrachtung wurde schon in §. 54 gebraucht.

sitiven Werthe von $1^q$ gleich. Wäre nun für irgend einen anderen bestimmten (zwischen $-1$ und $+1$ enthaltenen) Werth von $x$ der negative Werth von $(1+x)^q$ der Reihe $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ gleich, während für $x-h$, wo $h$ unbegrenzt klein ist, noch $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}}(x-h)^r$ dem positiven Werthe von $(1+x-h)^q$ gleich wäre, so würde $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}}(x-h)^r$ sich nicht unbegrenzt $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ nähern, also könnte $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ keine stetige Funktion von $x$ seyn.

4.

Wenn $Fx$ und $fx$ reelle Funktionen von $x$ sind, so ist $Fx + fx.i$ eine imaginäre Funktion von $x$. Sind $Fx$ und $fx$ zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ stetige Funktionen von $x$, so sagt man: die imaginäre Funktion $Fx + fx.i$ ist zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ stetig. Die Funktion $Fx + fx.i$ wird also namentlich eine stetige Funktion zwischen den Grenzen $a$ und $b$ seyn, sobald $Fx$ und $fx$ die Werthe zweier nach aufsteigenden Potenzen von $x$ geordneter Reihen ausdrücken, welche zwischen diesen Grenzen convergiren.

5.

Die Reihe $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ convergirt für jeden reellen Werth von $q$, wenn $x = u + vi$ und $(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ und ist dann einem der Werthe von $(1+u+vi)^q$ gleich (§. 92). Setzt man aber $u + vi = m(\cos\psi + \sin\psi.i)$ (vgl. §. 104) wo $m = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$ so ist $x^r = m^r(\cos r\psi + \sin r\psi.i)$. Setzt man nun

$$Fm = 1 + {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{B}} m\cos\psi + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{B}} m^2\cos 2\psi \ldots + {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} m^r\cos r\psi + \ldots$$

$$fm = {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{B}} m\sin\psi + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{B}} m^2\sin 2\psi \ldots + {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} m^r\sin r\psi + \ldots$$

so ist $\quad \Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r = Fm + fm.i$

und da $\Sigma\, {}^{q}\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ convergirt, sobald $m$ zwischen 0 und 1 liegt so müssen auch $Fm$ und $fm$ zwischen diesen Grenzen conver-

giren, also ist auch $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ eine imaginäre stetige Funktion von $m$ zwischen diesen Grenzen.

Setzt man aber $m=0$ also $u^2+v^2=0$ d. h. $u=0$, $v=0$ (da $u^2$ und $v^2$ nicht negativ seyn können) und mithin $x=0$ so ist $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r=1$. In diesem Falle geht aber $\overline{(1+u+vi)^q}$ in $\overline{1^q}$ über. Da nun $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ dem einfachsten in $\overline{1^q}$ enthaltenen Werthe gleich ist, nemlich der positiven Einheit, so heisst das mithin, dass in dem bestimmten Falle, wenn $u=0$, $v=0$, die Reihe $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ dem einfachsten in $\overline{(1+u+vi)^q}$ enthaltenen Werthe gleich ist. Wäre dies nun nicht überhaupt bei allen Werthen von $x$ der Fall, welche Werthen von $m$ entsprechen die $< 1$ sind, so müsste bei irgend einem solchen Werthe eine Unterbrechung der Stetigkeit statt finden, während wir bewiesen haben, dass $\overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$ für alle solche Werthe von $x$ eine stetige Funktion ist. Die Formel (§. 92 Form. 7)

$$(1+x)^q = \overset{r}{\Sigma}\, {}^q\mathfrak{B}x^r$$

wo $x=u+vi$ ist demnach so zu verstehen, dass man den einfachsten Werth von $\overline{(1+x)^q}$ d. h. denjenigen welcher dem einfachsten Werthe 1 von $\overline{1^q}$ entspricht, durch $(1+x)^q$ bezeichnet.

Unter der Voraussetzung dass $m<1$ hat man also, indem man $m\cos\psi$ statt $u$ und $m\sin\psi$ statt $v$ setzt,

3) $$(1+m\cos\psi+m\sin\psi\,.\,i)_q$$
$$= 1+\overset{1}{{}^q\mathfrak{B}}m\cos\psi+\overset{2}{{}^q\mathfrak{B}}m^2\cos 2\psi+\overset{3}{{}^q\mathfrak{B}}m^3\cos 3\psi+\ldots$$
$$+i(\overset{1}{{}^q\mathfrak{B}}m\sin\psi+\overset{2}{{}^q\mathfrak{B}}m^2\sin 2\psi+\overset{3}{{}^q\mathfrak{B}}m^3\sin 3\psi+\ldots)$$

Setzt man nun

$$[(1+m\cos\psi)^2+(m\sin\psi)^2]^{\frac{1}{2}}=(1+2m\cos\psi+m^2)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$\frac{1+m\cos\psi}{z}=\cos\alpha$$

$$\frac{m\sin\psi}{z}=\sin\alpha$$

wo unter $\alpha$ der kleinste Winkel verstanden wird, der diesen Gleichungen Genüge leistet, so ist

4) $(1 + m\cos\psi + m\sin\psi\,.\,i)^q$

$= (1 + 2m\cos\psi + m^2)^{\frac{q}{2}}\;(\cos\alpha + \sin\alpha\,.\,i)^q$

$= (1 + 2m\cos\psi + m^2)^{\frac{q}{2}}\;(\cos q\alpha + \sin q\alpha\,.\,i)$

Zugleich ist

$$tg\;\alpha = \frac{m\sin\psi}{1 + m\cos\psi}$$

und (§. 105)

5) $$\alpha = Arc\;tg\;\frac{m\sin\psi}{1 + m\cos\psi}\;{}^{*)}.$$

Man bemerke noch, ehe wir weiter gehen, dass alle vorhergehenden Betrachtungen ihre Gültigkeit auch für den Werth $m = 1$ behalten, sobald $q$ positiv ist, da die Reihe $\Sigma\, {}^q\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$ auch in diesem Falle noch convergirt und mithin auch dann noch eine stetige Funktion von $m$ bleibt (§. 92).

6.

Aus dem Vergleich von 3) und 4) folgt

6) $(1 + 2m\cos\psi + m^2)^{\frac{q}{2}}\;\cos q\alpha$

$= 1 + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} m\cos\psi + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} m^2\cos 2\psi + {}^q\overset{3}{\mathfrak{B}} m^3\cos 3\psi + \ldots$

7) $(1 + 2m\cos\psi + m^2)^{\frac{q}{2}}\;\sin q\alpha$

$= {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} m\sin\psi + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} m^2\sin 2\psi + {}^q\overset{3}{\mathfrak{B}} m^3\sin 3\psi + \ldots$

Setzt man $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ also $\cos\psi = 0$, $\sin\psi = \pm 1$ so ist nach 5)

---

*) Setzt man statt $m\sin\psi$ und $m\cos\psi$ wieder ihre Werthe $v$ und $u$ so kann man statt 4) auch schreiben

$$[1 + u + vi]^q = [(1 + u)^2 + v^2]^{\frac{q}{2}}\left[\cos\left(q\,Arc\,tg\frac{v}{1+u}\right) + \sin\left(q\,Arc\,tg\frac{v}{1+u}\right)i\right]$$

was mithin ebenfalls den Werth von $\Sigma\, {}^q\overset{r}{\mathfrak{B}}(u + vi)^r$ ausdrückt.

$$\alpha = Arc\ tg\ (\pm m)$$

und da $m < 1$ ist, so liegt $\alpha$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$, da $tg\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$. Nun geht in diesem Falle $1 + 2m \cos\psi + m^2$ in $1 + m^2$ über, aber $m^2 = (tg\ \alpha)^2$ also $1 + m^2 = 1 + (tg\ \alpha)^2$ $= 1 + \frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$ mithin $(1 + 2m\cos\psi + m^2)^{\frac{q}{2}}$ $= \frac{1}{(\cos\alpha)^q}$. Ferner ist $\cos\psi = \cos 3\psi \ldots = \cos(2k+1)\psi$ $= \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$, dagegen ist $\cos 2\psi = \cos\pi = -1$, $\cos 4\psi = \cos 2\pi = 1$ u. s. w.; $\sin\psi = \pm 1$, $\sin 3\psi = \mp 1$ u. s. w. $\sin 2\psi = \sin 4\psi \ldots. = 0$. Berücksichtigt man diese Werthe und setzt noch statt $m$ seinen Werth $\pm\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ so gehen die Formeln 6) und 7) in folgende über

8) $\cos q\alpha = (\cos\alpha)^q - \overset{2}{{}^{q}\mathfrak{B}}(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^{q-2} + \overset{4}{{}^{q}\mathfrak{B}}(\sin\alpha)^4(\cos\alpha)^{q-4} - \ldots.$

9) $\sin q\alpha = \overset{1}{{}^{q}\mathfrak{B}}\sin\alpha\ (\cos\alpha)^{q-1} - \overset{3}{{}^{q}\mathfrak{B}}(\sin\alpha)^3(\cos\alpha)^{q-3} + \ldots.$

Diese Formeln stimmen mit den Formeln 24) bis 27) des §. 118 überein, nur dass nun $q$ nicht blos (wie dort $n$) eine ganze Zahl bedeutet, sondern jeden reellen Werth haben kann sobald $\alpha$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt. Unter dieser Beschränkung müssen mithin auch die aus jenen Formeln abgeleiteten Formeln 35), 36), 37) und 38) ihre Geltung behalten, d. h. sie gelten für jeden reellen Werth von $n$ sobald $\alpha$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt.

Ist $q$ positiv und man setzt $m = 1$, so folgt aus 6) und 7)

$$(2 + 2\cos\psi)^{\frac{q}{2}}\cos q\alpha = 1 + \overset{1}{{}^{q}\mathfrak{B}}\cos\psi + \overset{2}{{}^{q}\mathfrak{B}}\cos 2\psi + \ldots$$

$$(2 + 2\cos\psi)^{\frac{q}{2}}\sin q\alpha = \overset{1}{{}^{q}\mathfrak{B}}\sin\psi + \overset{2}{{}_{q}\mathfrak{B}}\sin 2\psi + \ldots.$$

In diesem Falle giebt Form. 5) dieser Note $tg\,\alpha = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}$.
Nun ist (§. 100)

$$(\cos x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

ferner

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

also wenn man $2x = \psi$ setzt,

$$\sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}\psi$$
$$1+\cos\psi = 2(\cos\tfrac{1}{2}\psi)^2\,.$$

Hieraus folgt

$$tg\,\alpha = tg\,\tfrac{1}{2}\psi$$

Aber $\alpha$ ist zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ enthalten. Nimmt man daher an, dass $\frac{1}{2}\psi$ zwischen $k\pi-\frac{\pi}{2}$ und $k\pi+\frac{\pi}{2}$ enthalten ist, so muss $\alpha = \frac{1}{2}\psi - k\pi$ gesetzt werden. Man kann daher die zwei letzteren Formeln auch so schreiben:

$$10)\quad (2+2\cos\psi)^{\frac{q}{2}}\cos q\left(\frac{\psi}{2}-k\pi\right) = 1 + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos\psi + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos 2\psi + \dots$$

$$11)\quad (2+2\cos\psi)^{\frac{q}{2}}\sin q\left(\frac{\psi}{2}-k\pi\right) = {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin\psi + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\sin 2\psi + \dots$$

wo nun $\frac{\psi}{2}$ von $k\pi-\frac{\pi}{2}$ bis $k\pi+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist.

## 7.

In §. 126 wurde gezeigt wie man irgend eine ganze positive Potenz von $\sin a$ und $\cos a$ aus den bekannten Werthen von $\sin a$, $\sin 2a \dots \sin na$ und $\cos a$, $\cos 2a \dots \cos na$ finden kann. Die vorhergehenden Formeln befähigen uns dieselbe Aufgabe auch für gebrochene positive Potenzen zu lösen.

Man bemerke zunächst, dass in den Formeln 10) und 11) der Ausdruck $(2+2\cos\psi)^{\frac{q}{2}}$ vorkommt, welcher immer positiv ist, da $2+2\cos\psi = 2(1+\cos\psi)$ und der Zahlenwerth von $\cos\psi$ nicht $>1$ seyn kann, zugleich der ein-

fachste Werth der Potenz $\frac{q}{2}$ genommen werden soll. Nun wurde schon $1 + \cos\psi = 2(\cos\frac{1}{2}\psi)^2$ gesetzt, wofür man auch $2(\pm\cos\frac{1}{2}\psi)^2$ schreiben kann, dann ist aber $(2+2\cos\psi)^{\frac{q}{2}} = 2^q(\pm\cos\frac{1}{2}\psi)^q = (\pm 2\cos\frac{1}{2}\psi)^q$. Da aber dieser Ausdruck immer positiv seyn soll, so muss das obere oder untere Zeichen genommen werden, je nachdem $\cos\frac{1}{2}\psi$ positiv oder negativ ist, also je nachdem $\frac{1}{2}\psi$ zwischen $2l\pi - \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ oder $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{3\pi}{2}$ enthalten ist, wo $l$ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Man bezeichne irgend eine reelle Zahl durch $p$, multiplicire 10) mit $\cos p$ und 11) mit $\sin p$ und addire die Resultate indem man die Formel 13) des §. 95 berücksichtigt, so findet man

$$(2 + 2\cos\psi)^{\frac{q}{2}} \cos(q\frac{\psi}{2} - qk\pi - p)$$
$$= \cos p + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(\psi - p) + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(2\psi - p) + \ldots.$$

Schreibt man noch $\cos(p + qk\pi - q\frac{\psi}{2})$ statt $\cos(q\frac{\psi}{2} - qk\pi - p)$ und setzt $\frac{\psi}{2} = x$, so muss also $x$ zwischen $k\pi - \frac{\pi}{2}$ und $k\pi + \frac{\pi}{2}$ liegen und es ist $(2 + 2\cos\psi)^{\frac{q}{2}} = (\pm 2\cos x)^q$. Ist also $k = 2l$ so hat man

12) $$(2\cos x)^q \cos(p + 2ql\pi - qx)$$
$$= \cos p + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(2x - p) + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(4x - p) + \ldots.$$

wo $x$ zwischen $2l\pi - \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ liegt.

Ist dagegen $k = 2l + 1$ so hat man

13) $$(-2\cos x)^q \cos(p + q(2l + 1)\pi - qx)$$
$$= \cos p + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(2x - p) + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(4x - p) + \ldots.$$

wo $x$ zwischen $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{3\pi}{2}$ liegt.

Setzt man $p = qx$ so folgt aus 12), wenn $x$ zwischen $2l\pi - \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ liegt,

14) $(2\cos x)^q \cos 2ql\pi = \cos qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(q-4)x + \ldots.$

und aus 13), wenn $x$ zwischen $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{3\pi}{2}$ liegt,

15) $(-2\cos x)^q \cos q(2l+1)\pi = \cos qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(q-2)x + \ldots.$

Setzt man $p = qx + \frac{\pi}{2}$ und bedenkt dass überhaupt $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$, so folgt aus 12) und 13)

16) $(2\cos x)^q \sin 2ql\pi = \sin qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin(q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\sin(q-4)x + \ldots$

oder

17) $(-2\cos x)^q \sin q(2l+1)\pi = \sin qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\sin(q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\sin(q-4)x$

je nachdem $x$ zwischen $2l\pi - \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ oder zwischen $2l\pi + \frac{\pi}{2}$ und $2l\pi + \frac{3\pi}{2}$ liegt. Setzt man $x - \frac{\pi}{2}$ statt $x$, so geht $\cos x$ in $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ über, setzt man zugleich $p = qx$ so geht $\cos(2x - p) = \cos(p - 2x)$ in $\cos((q-2)x + \pi) = -\cos(q-2)x$, dagegen $\cos(4x - p)$ in $\cos((q-4)x + 2\pi) = \cos(q-4)x$ u. s. w. über.

Macht man daher diese Substitutionen in 12) so folgt

18) $(2\sin x)^q \cos q(2l + \frac{1}{2})\pi =$

$$\cos qx - {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(q-4)x + \ldots.$$

wo nun $x$ zwischen $2l\pi$ und $(2l+1)\pi$ liegt.

Liegt dagegen $x$ zwischen $(2l+1)\pi$ und $(2l+2)\pi$ so folgt aus 13) vermöge derselben Substitution

19) $(-2\sin x)^q \cos q(2l + \frac{3}{2})\pi =$

$$\cos qx - {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(q-4)x + \ldots.$$

Setzt man zugleich $p = qx + \frac{\pi}{2}$ und $x - \frac{\pi}{2}$ statt $x$, so erhält man aus 12)

20) $(2 \sin x)^q \sin q (2l + \frac{1}{2}) \pi =$

$$\sin qx - {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} \sin (q-2) x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} \sin (q-4) x - \ldots$$

wo $x$ zwischen $2l\pi$ und $(2l+1)\pi$ liegt, und aus 13)

21) $(-2 \sin x)^q \sin q (2l + \frac{3}{2}) \pi =$

$$\sin qx - {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} \sin (q-2) x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} \sin (q-4) x - \ldots$$

wenn $x$ zwischen $(2l+1)\pi$ und $(2l+2)\pi$ liegt.

Ist $q$ eine ganze Zahl, so stimmen diese Formeln mit den in §. 126 überein. Die Formel 14) z. B. geht nun, da $\cos 2ql\pi = 1$ ist, in

22) $2^q(\cos x)^q = \cos qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} \cos(q-2)x + \ldots + {}^q\overset{q}{\mathfrak{B}} \cos(q-2q)x$

über. Ist $q$ eine gerade Zahl $= 2h$ so hat diese Reihe ein Mittelglied ${}^q\overset{\frac{q}{2}}{\mathfrak{B}} \cos (q - 2\frac{q}{2}) = {}^q\overset{\frac{q}{2}}{\mathfrak{B}}$, ist $q$ eine ungerade Zahl, so giebt es kein solches Mittelglied; aber jedenfalls ist $\cos [q-2q] x = \cos qx$, $\cos [q - 2(q-1)] x = \cos (q-2) x$ u. s. w., zugleich ${}^q\overset{q}{\mathfrak{B}} = 1$, ${}^q\overset{q-1}{\mathfrak{B}} = {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}}$ u. s. w. woraus die Uebereinstimmung der Formel 22) mit den Formeln 44) und 45) des §. 126 folgt. Aehnlich verhält es sich mit den übrigen Formeln.

Setzt man $l = 0$ so erhält man noch aus 14) und 16) die bemerkenswerthen Formeln

23) $(2 \cos x)^q = \cos qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} \cos (q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} \cos (q-4) x + \ldots$

24) $0 = \sin qx + {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} \sin (q-2)x + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} \sin (q-4) x + \ldots$

welche von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ gelten.

## 8.

Wenn man in der Formel (§. 5 dieser Note)

$$(1 + x)^n = \Sigma\, {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} x^r$$

$x = vi$ setzt, so gilt sie, so lange $(v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ ist, also so lange der Zahlenwerth von $v < 1$ ist. Setzt man nun $v = \frac{\sin a}{\cos a} = tg\ a$, so behält mithin diese Formel ihre Geltung, so lange der Zahlenwerth von $tg\ a < 1$, d. h. so lange $a$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt. Unter dieser Voraussetzung hat man also, auch wenn $n$ keine ganze Zahl ist,

$$(1 + \frac{\sin a}{\cos a} i)^n = 1 + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} \frac{\sin a}{\cos a} i + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}} (\frac{\sin a}{\cos a} i)^2 + \ldots$$

zugleich ist, nach §. 113 Form. 27,

$$(\cos a + \sin a \,.\, i)^n = \cos na + \sin na \,.\, i$$

Es müssen mithin alle Resultate, welche wir früher (§. 118 ff.) unter der Voraussetzung, dass $n$ eine ganze positive Zahl ist, lediglich aus diesen Formeln abgeleitet haben, auch für andere reelle Werthe von $n$ ihre Geltung behalten, sobald der Zahlenwerth von $a < \frac{\pi}{4}$ ist. Namentlich hat man, den Formeln 24) bis 27) des §. 118 entsprechend,

$$25) \qquad \cos na = (\cos a)^n - {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-2} (\sin a)^2 + {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-4} (\sin a)^4 - \ldots$$

$$26) \qquad \sin na = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-1} \sin a - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-3} (\sin a)^3 + {}^n\overset{5}{\mathfrak{B}} (\cos a)^{n-5} (\sin a)^5 - \ldots$$

nur mit dem Unterschiede, dass nun die Reihen nicht abbrechen. Es verschwindet daher auch der Unterschied zwischen geraden und ungeraden $n$.

Ausserdem gelten diese Formeln auch noch für $tg\ a = \pm 1$, also für $a = \pm \frac{\pi}{4}$, sobald $n$ positiv ist, wie aus der in §. 5 dieser Note gemachten Bemerkung erhellt. In diesem Falle ist $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Formeln 25) und 26) verwandeln sich in

$$\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} [1 - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \ldots .]$$

$$\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} [{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} - {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \ldots]$$

9.

Da ferner wenn $a \leqq \frac{\pi}{4}$ auch $\sin a < 1$ ist, so lassen sich, $\sin a = z$ gesetzt, die Werthe von $(1 - z^2)^{\frac{n}{2}}$, $(1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}$ ... noch immer nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, auch wenn $\frac{n}{2}, \frac{n\ 1}{2}$ ... keine ganzen Zahlen sind. Man kann demnach die Resultate der §§. 122 bis 124 auch auf den Fall übertragen, wenn $n$ keine ganze positive Zahl ist, sobald der Zahlenwerth von $a < \frac{\pi}{4}$ (oder auch, wenn $n$ positiv, $a = \pm \frac{\pi}{4}$) und findet, den Formeln 35), 36), 37), 38) entsprechend, die unendlichen Reihen

27) $\cos na = 1 - \frac{n^2}{2} (\sin a)^2 + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4} (\sin a)^4 - \frac{n^2 (n^2 - 2^2) (n^2 - 4)^2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} (\sin a)^6 + \ldots .$

28) $\cos na = \cos a \left[1 - \frac{n^2-1}{1.2} (\sin a)^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4} (\sin a)^4 - \frac{(n^2 - 1) (n^2 - 3^2) (n^2 - 5^2)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} (\sin a)^6 + \ldots .\right]$

29) $\sin na = \cos a \left[n \sin a - \frac{n (n^2 - 2^2)}{1 . 2 . 3} (\sin a)^3 + \frac{n (n^2 - 2^2) (n^2 - 4^2)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} (\sin a)^5 - \ldots .\right]$

30) $\sin na = n \sin a - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} (\sin a)^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} (\sin a)^5 - \ldots$

Da der Ausdruck $(\cos vi + \sin vi.i)^n = (\cos vi)^n \left[1 + \frac{\sin vi}{\cos vi} i\right]^n$

sich, auch wenn $n$ keine ganze Zahl ist, noch immer nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln lässt, sobald der Zahlenwerth von $\frac{\sin vi . i}{\cos vi}$ kleiner als die Einheit ist, so gelten nach §. 129 die Formeln 25 bis 30 unter dieser Beschränkung auch dann noch, wenn man $vi$ statt $a$ setzt.

Dagegen kann man hier nicht mehr, den Resultaten des §. 125 entsprechend, aus den vier Formeln 27 bis 30 vier neue Formeln ableiten, da sobald $n$ keine ganze positive Zahl ist, auch die Formeln $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \pm \cos na$; $\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \mp \sin na$ nicht mehr statt finden.

### 10.

Da $\frac{\sin na}{n} = a - \frac{n^2 a^3}{1.2.3} + \frac{n^4 a^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$ (§. 95 Form. 5), so folgt, wenn $\lim\left(\frac{\sin na}{n}\right)$ den Werth bedeutet, welchen $\frac{\sin na}{n}$ für $n = 0$ annimmt,

$\lim\left(\frac{\sin na}{n}\right) = a$. Ist aber $a$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ enthalten, so folgt auch aus 30)

$$\lim\left(\frac{\sin na}{n}\right) = \sin a + \frac{1}{2}\frac{(\sin a)^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{(\sin a)^5}{5} \ldots$$

mithin

$$31) \quad a = \sin a + \frac{1}{2}\frac{(\sin a)^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{(\sin a)^5}{5} \ldots\ldots$$

vermöge welcher Formel man jede Zahl $a$, die nicht grösser als $\frac{\pi}{4}$ ist, aus ihrem bekannten Sinus berechnen kann. Setzt man $\sin a = z$ und bezeichnet man $a$ durch $Arc \sin z$ so geht diese Formel in

$$Arc \sin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{z^5}{5} \ldots$$

über.

Auch folgt aus 29)

$$lim\left(\frac{sin\ na}{n}\right) = cos\ a\ [sin\ a + \frac{2}{3}(sin\ a)^3 + \frac{2.4}{3.5}(sin\ a)^5 \ldots]$$

also wenn $a$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt,

32) $a = cos\ a\ [sin\ a + \frac{2}{3}(sin\ a)^3 + \frac{2.4}{3.5}(sin\ a)^5 \ldots]$

Bezeichnet $b$ eine Zahl, welche zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist $\frac{\pi}{2} - b$ eine Zahl die zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegt, setzt man also $\frac{\pi}{2} - b = a$ so kann man $a$ vermittelst der Formeln 31) und 32) berechnen. Nun ist $sin\ a = cos\ b$ und $cos\ a = sin\ b$ also nach 31)

$$\frac{\pi}{2} - b = cos\ b + \frac{1}{2}\frac{(cos\ b)^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(cos\ b)^5}{5} \ldots.$$

d. h.

$$b = \frac{\pi}{2} - [cos\ b + \frac{1}{2}\frac{(cos\ b)^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(cos\ b)^5}{5} \ldots.]$$

und nach 32)

$$\frac{\pi}{2} - b = sin\ b\ [cos\ b + \frac{2}{3}(cos\ b)^3 + \frac{2\ .\ 4}{3\ .\ 5}(cos\ b)^5 \ldots]$$

also

$$b = \frac{\pi}{2} - sin\ b\ [cos\ b + \frac{2}{3}(cos\ b)^3 + \frac{2\ .\ 4}{3\ .\ 5}(cos\ b)^5 \ldots]$$

Man kann die Formel 32) noch in folgender Weise umgestalten. Man multiplicire mit $cos\ a$ so hat man

$$a\ cos\ a = (cos\ a)^2\ [sin\ a + \frac{2}{3}(sin\ a)^3 + \frac{2.4}{3.5}(sin\ a)^5 + \ldots]$$

Setzt man nun $1 - (sin\ a)^2$ statt $(cos\ a)^2$ und vereinigt die Glieder, welche dieselbe Potenz von $sin\ a$ enthalten, so erhält man

$$a\ cos\ a = sin\ a - \frac{1}{3}(sin\ a)^3 - \frac{1.2}{3.5}(sin\ a)^5 - \frac{1.2.4}{3.5.7}(sin\ a)^7 \ldots$$

oder

$$a = \frac{sin\ a}{cos\ a}[1 - \frac{1}{3}(sin\ a)^2 - \frac{1.2}{3.5}(sin\ a)^4 - \frac{1.2.4}{3.5.7}(sin\ a)^6 \ldots]$$

Nun ist $\frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$ und ebendeswegen $(\cos a)^2 = \frac{1}{1 + (tg\, a)^2}$
also $(\sin a)^2 = \frac{(tg\, a)^2}{1 + (tg\, a)^2}$ und daher

$$33)\quad a = tg\, a\, [1 - \frac{1}{3}\, \frac{(tg\, a)^2}{1 + (tg\, a)^2} - \frac{1.2}{3.5} \left(\frac{(tg\, a)^2}{1 + (tg\, a)^2}\right)^2 - \ldots]$$

so dass man die Zahl $a$ aus ihrer Tangente berechnen kann. Eine einfachere Formel zu demselben Zwecke wird in der folgenden Note gefunden werden.

## 11.

Verfolgt man das Verfahren, welches hier angewandt wurde, weiter, so findet man, dass man nicht blos $a$ sondern auch jede höhere ungerade (ganze) Potenz von $a$ durch eine nach Potenzen von $\sin a$ fortlaufende Reihe ausdrücken kann. Will man z. B. eine solche Reihe für $a^3$ finden, so gehe man von der Formel

$$\frac{\frac{\sin na}{n} - a}{-n^2} = \frac{a^3}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{n^2 a^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots$$

aus. Setzt man $n = 0$ und bezeichnet den Werth, welchen $\frac{a - \frac{\sin na}{n}}{n^2}$ unter dieser Voraussetzung annimmt, durch

$lim \left(\frac{a - \frac{\sin na}{n}}{n^2}\right)$ so hat man

$$lim \left(\frac{a - \frac{\sin na}{n}}{n^2}\right) = \frac{a^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Nun folgt aus 30) und 31)

$$a - \frac{\sin na}{n} = \frac{1 + (n^2 - 1)}{1.2.3} (\sin a)^3 + \frac{1.3^2 - (n^2 - 1)(n^2 - 3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} (\sin a)^5 \ldots$$

oder

$$\frac{a - \frac{\sin na}{n}}{n^2} = \frac{(\sin a)^3}{1\,.2.3} - \frac{n^2 - 10}{1.2.3.4.5} (\sin a)^5 \ldots$$

also

$$a^3 = (\sin a)^3 + \frac{10}{4.5}(\sin a)^5 + \frac{259}{4.5.6.7}(\sin a)^7 + \ldots. \text{*)}$$

Auch kann man auf ähnliche Weise jede **gerade** Potenz von $a$ durch eine nach Potenzen von $\sin a$ fortlaufende Reihe ausdrücken. Denn aus

$$\cos na = 1 - \frac{(na)^2}{1.2} + \frac{(na)^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots$$

folgt, wenn man den Werth, welchen $\frac{1-\cos na}{n^2}$ für $n=0$ annimmt, durch $\lim\left(\frac{1-\cos na}{n^2}\right)$ bezeichnet,

$$\lim\left(\frac{1-\cos na}{n^2}\right) = \frac{a^2}{1.2}$$

und aus 27)

$$\lim\left(\frac{1-\cos na}{n^2}\right) = \frac{a^2}{1.2} = \frac{(\sin a)^2}{1.2} + \frac{2^2}{1.2.3.4}(\sin a)^4$$

$$+ \frac{2^2.4^2}{1.2.3.4.5.6}(\sin a)^6 + \ldots$$

also

$$a^2 = (\sin a)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^4 + \frac{2.4}{3.5}\,\frac{(\sin a)^6}{3} + \ldots.$$

---

*) Das Gesetz, welches die Coefficienten in dieser Reihe befolgen, ergiebt sich aus §. 76 Form. 43. Nennt man $\frac{A_{r-1}}{4.5..2r+1}$ den Coefficienten von $(\sin a)^{2r+1}$, so ist $A_{r-1}$ die Summe der Combinationen ohne Wiederholung zur Classe $r-1$ aus den Elementen $1, 3^2, 5^2 \ldots (2r-1)^2$; z. B. $10 = 1 + 3^2$, $259 = 1.3^2 + 1.5^2 + 3^2.5^2$. Denn $A_{r-1}$ ist der Coefficient von $n^2$ in der Entwickelung der $r$ Faktoren $(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(2r-1)^2)$. Setzt man aber in der erwähnten Formel $a_0 = -1$, $b_0 = -3^2$ u.s.w. und $a_1 x = n^2$ so ergiebt sich aus derselben

$$(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots.[n^2-(2r-1)^2] = \overset{r}{C}{}^1 + \overset{r-1}{C}{}^1 n^2 + \ldots$$

wo sich die Combinationen auf die Elemente $-1$, $-3^2$, u.s.w. beziehen und wofür man $(-1)^r\,\overset{r}{C}{}^1 + (-1)^{r-1}\,\overset{r-1}{C}{}^1 n^2 + \ldots$ schreiben kann, wenn man dafür die positiven Elemente $1, 3^2, 5^2$ u.s.w. nimmt.

und es ergiebt sich aus dem Vorhergehenden wie man $a^4, a^6 \ldots$ ebenfalls durch Fortsetzung dieser Betrachtung finden könnte.

## Note IX.
### Ueber die Berechnung der Zahl $\pi$.

1.

Die vorhergehende Note enthält verschiedene Formeln, welche uns in den Stand setzen, den Werth der Zahl $\pi$ vermittelst convergirender Reihen zu berechnen (vgl. §. 100). Setzt man z. B in 31) statt $a$ den Werth $\frac{\pi}{4}$, so erhält man wegen $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} + \ldots .$$

Eine einfachere Formel erhält man aus 32) nemlich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{1}{2^5} + \ldots .$$

und 33) giebt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1\,.\,2}{3\,.\,5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1\,.\,2\,.\,4}{3\,.\,5\,.\,7}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \ldots\ldots$$

Andere theils einfachere theils stärker convergirende Reihen erhält man aus folgenden, auch an und für sich wichtigen, Betrachtungen.

2.

Versteht man unter $\log(1+vi)$ den einfachsten Logarithmen von $1+vi$ und setzt $1+vi = e^{\log(1+vi)}$ so hat man (§. 113 Formel 26) $\left[e^{\log(1+vi)}\right]^q = e^{q\log(1+vi)}$

oder $\qquad (1+vi)^q = e^{q\log(1+vi)}$

und demnach (§. 93)

$$(1+vi)^q = 1 + q\log(1+vi) + \frac{q^2}{2}[\log(1+vi)]^2 + \ldots .$$

und

1) $$\frac{(1+vi)^q-1}{q} = \log(1+vi) + \frac{q}{2}[\log(1+vi)]^2 + \ldots.$$

Aus der in der vorhergehenden Note gefundenen Formel

$$(1+x)^q = \Sigma\, {}^q\overset{r}{\mathfrak{B}}\, x^r$$

folgt aber, wenn man $x = vi$ setzt,

$$(1+vi)^q = 1 + qvi + \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}(vi)^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(vi)^3 + \ldots$$

welche, wenn $q$ positiv ist, für die Zahlenwerthe von $v$ die nicht $>$ 1 sind, gilt. Hieraus folgt

2) $$\frac{(1+vi)^q-1}{q} = vi + \frac{(q-1)}{1\,.\,2}(vi)^2 + \frac{(q-1)(q-2)}{2\,.\,3}(vi)^3 + \ldots.$$

Bezeichnet $\lim\left[\frac{(1+vi)^q-1}{q}\right]$ die Grenze, welcher sich $\frac{(1+vi)^q-1}{q}$ unbeschränkt nähert, wenn man $q$ unbeschränkt abnehmen lässt, so hat man nach Form. 1)

3) $$\lim\left[\frac{(1+vi)^q-1}{q}\right] = \log(1+vi)$$

da die Reihe

$$\frac{q}{2}[\log(1+vi)]^2 + \frac{q^2}{2\,.\,3}[\log(1+vi]^3 + \ldots$$

$$= \frac{q}{2}\left[[\log(1+vi)]^2 + \frac{q}{3}[\log(1+vi)]^3 + \ldots\right]$$

wie die in Klammern stehende Reihe $[\log(1+vi)]^2 + \frac{q}{3}[\log(1+vi)]^3 + \ldots$ eine convergirende ist, und mithin verschwinden muss, wenn man $q = 0$ setzt.

Aus Formel 2) folgt aber

4) $$\lim\left[\frac{(1+vi)^q-1}{q}\right] = vi - \frac{(vi)^2}{2} + \frac{(vi)^3}{3} - \frac{(vi)^4}{4} \ldots.$$

Aus Formel 3) und 4) erhält man daher

5) $$\log(1+vi) = vi - \frac{(vi)^2}{2} + \frac{(vi)^3}{3} - \frac{(vi)^4}{4} + \ldots$$

$$= \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^6}{6} - \ldots\ldots + i\left(v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \ldots\right)$$

Nun haben wir (nach §. 106 Form. 18)

$$log\,(1+vi) = log\,(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + i\,.\,Arc\;tg\;v$$

und nach §. 83 Form. 12)

$$log\,(1+v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,log(1+v^2) = \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^6}{6} - \ldots\ldots$$

also

6) $$Arc\;tg\;v = v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7}\ldots\ldots$$

oder, wenn man $Arc\;tg\;v = a$, also $v = tg\;a$ setzt,

7) $$a = tg\,a - \frac{1}{3}\,(tg\,a)^3 + \frac{1}{5}\,(tg\,a)^5 - \frac{1}{7}\,(tg\,a)^7 + \ldots\ldots$$

welches eine einfachere Formel zur Berechnung der Zahl $a$ aus ihrer Tangente, als die in der vorhergehenden Note Formel 33) gefundene ist.

Aus Formel 5) folgt auch noch

8) $$log\,(1-vi) = \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^6}{6} - \ldots - i\,(v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \ldots)$$

Also nach 6)

9) $$Arc\;tg\;v = log\,\frac{(1+vi) - log\,(1-vi)}{2i} = \frac{1}{2i}\,log\,(\frac{1+vi}{1-vi})$$

3.

Wir machen nochmals darauf aufmerksam, dass die Formel 6) nur dann statt hat, wenn der Zahlenwerth von $v$ die Einheit nicht übersteigt und dass $Arc\,tg\,v$ die kleinste Zahl bedeutet, deren Tangente den Werth $v$ hat (§. 105).

Nun ist $\frac{\pi}{4}$ die kleinste Zahl, deren Sinus und Cosinus denselben Werth haben (§. 99) deren Tangente mithin $= 1$ ist, folglich können mit Hülfe der Formel 6) nur solche Zahlen aus ihrer bekannten Tangente berechnet werden, welche nicht ausserhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegen.

Ist $v = 1$ so folgt aus 6)

10) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\ldots\ldots$$

Mit Hülfe dieser einfachen convergirenden Reihe kann also

der Werth von $\frac{\pi}{4}$ mit jedem Grade von Genauigkeit näherungsweise gefunden werden (vgl. §. 100). Wir werden aber später zeigen (Note XI) dass $\pi$ keine rationale Zahl ist und sich daher überhaupt nicht anders als näherungsweise durch rationale Zahlen ausdrücken lässt.

Aus 10) folgt

$$2\pi = 8\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots\right)$$

und hieraus berechnet man

$$2\pi = 6{,}28318 \ldots$$

was zugleich die Länge der Peripherie eines Kreises ausdrückt, dessen Halbmesser der Einheit gleich gesetzt wird (§. 101) *).

In Formel 10) sind die Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ. Setzt man allmälich $r = 1, 2, 3 \ldots$ so sind die positiven Glieder sämmtlich in der Form $\frac{1}{4r-3}$, die negativen in der Form $\frac{1}{4r-1}$ enthalten. Setzt man also näherungsweise

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots + \frac{1}{4r-3} - \frac{1}{4r-1}$$

so heisst das, man berechnet $\frac{\pi}{4}$ aus den $2r$ ersten Gliedern der Reihe. Nennt man den vernachlässigten Theil der Reihe $R$, so hat man

$$R = \frac{1}{4r+1} - \frac{1}{4r+3} + \frac{1}{4r+5} - \frac{1}{4r+7} \ldots$$

---

*) Man hat allmälich die Zahl $\pi$ bis zu einer sehr grossen Reihe von Decimalstellen berechnet. In dem Crelle'schen Journal für die reine u. angew. Mathematik Bd. 27 S. 198 findet man den Werth bis auf 200 Decimalstellen von dem bekannten Kopfrechner Dahse berechnet. In Grunert's Archiv für Mathematik und Physik Bd. 25 S. 472 findet man sogar die Berechnung bis auf 500 Decimalstellen fortgesetzt. Die ersten Stellen sind

$$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$$

bis dahin hat Ludolph von Cöln die Rechnung ausgeführt, weswegen diese Zahl auch die Ludolphinische genannt wird.

also

$$R > \frac{1}{4r+1} - \frac{1}{4r+3} \quad (vgl.\ §.\ 59)$$

d. h.

$$R > \frac{2}{(4r+1)\,(4r+3)}$$

Setzt man nun $r = 100$, d. h. braucht man zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ die ersten 200 Glieder der Reihe, so vernachlässigt man mehr als $\frac{2}{401\,.\,403} = 0,\ 00001\ldots.$

Um also $\frac{\pi}{4}$ bis auf die 5te Decimalstelle genau zu finden, muss man jedenfalls mehr als 200 Glieder der Reihe 10) verwandeln, d. h. diese Reihe convergirt sehr langsam und es ist sehr mühselig aus ihr den Werth von $\pi$ mit grosser Genauigkeit zu berechnen. Man kann aber leicht aus dem Vorhergehenden stärker convergirende Reihen finden.

4.

Aus Formel 9) folgt, wenn man $v = 1$ setzt,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

oder da $\frac{1+i}{1-i} = i$

11) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \log i \text{ (vgl. §. 103 am Schluss)}$$

Man setze nun $i = \left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^2 = \frac{1+2qi-q^2}{1-2qi-q^2}$

so folgt hieraus $i + 2q - q^2 i = 1 + 2qi - q^2$ also $1 - 2q - q^2 = 0$ d. h. $q = \sqrt{2} - 1$, also

$$i = \left[\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right]^2 \text{ und } \log i = 2 \log \left[\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right]$$

und wenn man diesen Werth in 11) substituirt

$$\frac{\pi}{4} = 2\,.\,\frac{1}{2i} \log \left[\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right]$$

oder nach 9), wenn man $\sqrt{2}-1$ (was $<1$ ist) statt $v$ setzt,

$$\frac{\pi}{4} = 2\left[(\sqrt{2}-1) - \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} + \frac{(\sqrt{2}-1)^5}{5} - \ldots\right]$$

d. h.

12) $$\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 - \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} + \frac{(\sqrt{2}-1)^5}{5} - \ldots.$$

Setzt man näherungsweise $\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^3 \ldots$ $+ \frac{(\sqrt{2}-1)^{4r-3}}{4r-3} - \frac{(\sqrt{2}-1)^{4r-1}}{4r-1}$ so dass man also $2r$ Glieder zur Berechnung anwendet, so ist, wenn $R$ den vernachlässigten Theil der Reihe bezeichnet, $R < \frac{(\sqrt{2}-1)^{4r+1}}{4r+1}$ (vgl. §. 59). Setzt man nun z. B. $r=3$, so ist $R < \frac{(\sqrt{2}-1)^{13}}{13}$ d. h. $R < 0{,}0000009$. Man erhält mithin, indem man die sechs ersten Glieder der Reihe 12) anwendet, den Werth von $\frac{\pi}{8}$ bis auf eine Einheit der sechsten Decimalstelle genau.

Eine nicht so stark convergirende aber bequemere Reihe erhält man, wenn man

$$i = \left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

setzt, denn hieraus folgt

$$(i^2) = -1 = \left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^3$$

und demnach, wenn man die dritte Potenz entwickelt,

$$-(1-3qi-3q^2+q^3i) = 1+3qi-3q^2-q^3i$$

also $3q^2 - 1 = 0$ oder $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mithin

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ oder } \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5}\ldots\right)$$

und

13) $$\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\,.\,3} + \frac{1}{3^2\,.\,5} - \frac{1}{3^3\,.\,7} \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3^{2r-2}(4r-3)} - \frac{1}{3^{2r-1}(4r-1)} \ldots\ldots\right)$$

Wendet man hier wieder $2r$ Glieder der in Klammern stehenden Reihe zur Berechnung an, d. h. nimmt man die Reihe bis zum Gliede $-\frac{1}{3^{2r-1}(4r-1)}$ so ist der vernachlässigte Theil $R$ kleiner als $\frac{1}{3^{2r}(4r+1)}$. Um $\frac{\pi}{8}$ zu erhalten müsste man noch mit $\frac{\sqrt{3}}{4}$ multipliciren und der Fehler des Resultats beträge weniger als $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3^{2r}(4r+1)}$. Setzt man nun wieder $r = 3$ so ist $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3^6\,.\,13} = 0{,}00004\ldots$, d. h. man erhält wenn man 6 Glieder der Reihe 13) anwendet, $\frac{\pi}{8}$ mit einer Genauigkeit, die um weniger als 5 Einheiten der 5 Decimalstellen von der Wahrheit abweicht. In der That findet man $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \frac{1}{3^4.9} - \frac{1}{3^5.11}\right)$ $= 0{,}39266\ldots$ Aus dem oben gegebenen Werthe $2\pi = 6{,}28318\ldots$ folgt aber, wenn man mit 16 dividirt, $\frac{\pi}{8} = 0{,}39269$ so dass der Unterschied nicht 4 Einheiten der 5ten Decimalstelle beträgt.

Andere stark convergirende Reihen ergeben sich durch folgendes Verfahren. Man setze

$$1 + vi = k(1 + pi)(1 + qi)$$
$$1 - vi = k(1 - pi)(1 - qi)$$

so ist $\quad 1 = k(1 - pq);\; v = k(p + q)$ also

$$v = \frac{p+q}{1-pq}$$

und

14) $$q = \frac{v-p}{1+vp}$$

Ist also $v$ gegeben und man nimmt $p$ willkührlich an, so kann man hiernach $q$ berechnen. Setzt man dann

$$1 + qi = k^1 (1 + p_1 i)(1 + q_1 i)$$
$$1 - qi = k^1 (1 - p_1 i)(1 - q_1 i)$$

so findet man ebenso $q_1 = \frac{q - p_1}{1 + q p_1}$

Man hat demnach

15) $$\frac{1 + vi}{1 - vi} = \frac{(1 + pi)(1 + qi)}{(1 - pi)(1 - qi)}$$

wenn $q = \frac{v - p}{1 + vp}$. Ferner

$$\frac{1 + vi}{1 - vi} = \frac{(1 + pi)(1 + p_1 i)(1 + q_1 i)}{(1 - pi)(1 - p_1 i)(1 - q_1 i)}$$

wenn zugleich $q_1 = \frac{q - p_1}{1 + qp^1}$. Ebenso fände man

$$\frac{1 + vi}{1 - vi} = \frac{(1 + pi)(1 + p_1 i)(1 + p_2 i)(1 + q_2 i)}{(1 - pi)(1 - p_1 i)(1 - p_2 i)(1 - q_2 i)}$$

wenn auch noch $q_2 = \frac{q_1 - p_2}{1 + q_1 p_2}$, und

16) $$\frac{1 + vi}{1 - vi} = \frac{(1 + pi)(1 + p_1 i)(1 + p_2 i)(1 + p_3 i)(1 + q_3 i)}{(1 - pi)(1 - p_1 i)(1 - p_2 i)(1 - p_3 i)(1 - q_3 i)}$$

wenn ausserdem $q_3 = \frac{q_2 - p_3}{1 + q_2 p_3}$ und man sieht wie dies Verfahren fortzusetzen ist.

Ist nun z. B. $v = 1$ und man nimmt $p = \frac{1}{2}$ so folgt (aus 14) $q = \frac{1}{3}$ und nach 15)

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2} i}{1 - \frac{1}{2} i}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{3} i}{1 - \frac{1}{3} i}\right)$$

folglich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} log \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right) = \frac{1}{2i} log \left(\frac{1 + \frac{1}{2} i}{1 - \frac{1}{2} i}\right) + \frac{1}{2i} log \left(\frac{1 + \frac{1}{3} i}{1 - \frac{1}{3} i}\right)$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \cdots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \cdots$$

Setzt man $p = p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{5}$ und $v = 1$, so findet man $q = \frac{2}{3}$, $q_1 = \frac{7}{17}$, $q_2 = \frac{9}{46}$, $q_3 = -\frac{1}{239}$ also nach 16)

$$\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{1+\frac{1}{5}i}{1-\frac{1}{5}i}\right)^4 \left(\frac{1-\frac{1}{239}i}{1+\frac{1}{239}i}\right)$$

und demnach

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \cdot 4 \log \left(\frac{1+\frac{1}{5}i}{1-\frac{1}{5}i}\right) - \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+\frac{1}{239}i}{1-\frac{1}{239}i}\right)$$
$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} \cdots\right)$$

welcher Ausdruck sehr rasch convergirt. Man sieht leicht dass sich aus derselben Quelle eine Menge noch stärker convergirender Reihen ableiten lassen.

5.

Die Formel $Arc\ tg\ v = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+vi}{1-vi}\right)$ gilt auch noch, wenn der Zahlenwerth von $v$ grösser als die Einheit ist, nur darf man alsdann diesen Ausdruck nicht mehr der Reihe $v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5}$ gleich setzen. Aus §. 106 Form. 18) folgt nemlich für jedes $v$

$$\log (1 + vi) = \log (1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + i\ Arc\ tg\ v$$
$$\log (1 - vi) = \log (1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - i\ Arc\ tg\ v$$

also, wenn man die zweite Gleichung von der ersten abzieht,

$$Arc\ tg\ v = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + vi}{1 - vi}\right)$$

Man findet ebenso

$$Arc\ tg\ u = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + ui}{1 - ui}\right)$$

und mithin

$$Arc\ tg\ v + Arc\ tg\ u = \frac{1}{2i} \log \frac{(1 + vi)(1 + ui)}{(1 - vi)(1 - ui)}$$

$$= \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + \frac{v + u}{1 - vu} i}{1 - \frac{v + u}{1 - vu} i}\right)$$

$$Arc\ tg\ v - Arc\ tg\ u = \frac{1}{2i} \log \frac{(1 + vi)(1 - ui)}{(1 - vi)(1 + ui)}$$

$$= \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + \frac{v - u}{1 + vu} i}{1 - \frac{v - u}{1 + vu} i}\right)$$

d. h.

17) $$Arc\ tg\ v + Arc\ tg\ u = Arc\ tg\ \frac{v + u}{1 - vu}$$

18) $$Arc\ tg\ v - Arc\ tg\ u = Arc\ tg\ \frac{v - u}{1 + vu}$$

Ist $vu = 1$ also $u = \frac{1}{v}$ so folgt hieraus

$$Arc\ tg\ v + Arc\ tg\ \frac{1}{v} = Arc\ tg\ \infty = \frac{\pi}{2}$$

da $tg\ \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \infty$ und zugleich $\frac{\pi}{2}$ die kleinste Zahl ist, deren Cosinus Null ist (§. 99).

Auch diese Formeln kann man zur Berechnung der Zahl $\pi$ anwenden.

Aus der Formel 6) ergiebt sich nemlich, dass dieselbe desto rascher convergirt, einen je kleineren Bruch man statt $v$ nimmt. Kann man also vermittelst Form. 17) z. B. $\frac{\pi}{4}$ d. h.

*Arc tg* 1 in eine Summe von Zahlen zerlegen, deren Tangenten kleine ächte Brüche sind, so wird man vermittelst Form. 6) den Werth von $\frac{\pi}{4}$ desto rascher mit grosser Genauigkeit finden, je kleiner jene ächten Brüche sind.

Setzt man z. B. $v = \frac{1}{5}$, $u = \frac{1}{8}$ so folgt aus 17)

$$Arc\ tg\ \frac{1}{5} + Arc\ tg\ \frac{1}{8} = Arc\ tg\ \left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}}\right) = Arc\ tg\ \frac{1}{3}$$

Ferner

$$Arc\ tg\ \frac{1}{2} + Arc\ tg\ \frac{1}{3} = Arc\ tg\ \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}\right) = Arc\ tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$$

also

$$\frac{\pi}{4} = Arc\ tg\ \frac{1}{2} + Arc\ tg\ \frac{1}{5} + Arc\ tg\ \frac{1}{8}$$

## 6.

Man kann die Betrachtungen des §. 2 dieser Note noch verallgemeinern. Schreibt man $e^{\log(1 + 2m \cos\psi + m^2)}$ statt $1 + 2m \cos\psi + m^2$ und $e^{q\alpha i}$ statt $\cos q\alpha + \sin q\alpha . i$ so hat man nach Formel 3) und 4) der vorhergehenden Note, sobald der Zahlenwerth von $m < 1$ ist,

$$e^{\frac{q}{2}\log(1 + 2m\cos\psi + m^2)} \cdot e^{q\alpha i} = e^{q[\alpha i + \frac{1}{2}\log(1 + 2m\cos\psi + m^2)]}$$
$$= 1 + {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{B}} m (\cos\psi + \sin\psi i) + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{B}} m^2 (\cos 2\psi + \sin 2\psi . i) + \ldots$$

Andererseits ist

$$e^{q[\alpha i + \frac{1}{2}\log(1 + 2m\cos\psi + m^2]} = 1 + q[\alpha i + \frac{1}{2}\log(1 + 2m\cos\psi + m^2)]$$
$$+ \frac{q^2}{1 . 2}[\alpha i + \frac{1}{2}\log(1 + 2m\cos\psi + m^2)]^2 + \ldots.$$

Mithin ist auch, wenn man in beiden Entwickelungen die Einheit abzieht und dann durch ${}^{q}\overset{1}{\mathfrak{B}} = q$ dividirt,

$$m\,(\cos\psi + \sin\psi.i) + \frac{(q-1)}{2}\,m^2\,(\cos 2\psi + \sin 2\psi.i) + \ldots$$

$$= \alpha i + \frac{1}{2}\log(1+2m\cos\psi+m^2) + \frac{q}{1.2}[\alpha i + \frac{1}{2}\log(1+2m\cos\psi+m^2)]^2 + \ldots$$

Setzt man also $q = 0$ so folgt

19) $$\frac{1}{2}\,(\log\,(1 + 2m\cos\psi + m^2) + \alpha i$$

$$= m(\cos\psi + \sin\psi.i) - \frac{m^2}{2}\,(\cos 2\psi + \sin 2\psi.i) + \ldots$$

Diese Gleichung zerlegt sich in zwei, und zwar, wenn man den Werth von $\alpha$ aus Formel 5) der vorhergehenden Note nimmt, so folgt

20) $$\frac{1}{2}\log(1+2m\cos\psi+m^2) = m\cos\psi - \frac{m^2}{2}\cos 2\psi + \frac{m^3}{3}\cos 3\psi - \ldots$$

21) $$Arc\,tg\,\frac{m\sin\psi}{1+m\cos\psi} = m\sin\psi - \frac{m^2}{2}\sin 2\psi + \frac{m^3}{3}\sin 3\psi - \ldots$$

Die Formel 6) dieser Note folgt aus 21) wenn man $\psi = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Setzt man in 20) $m = 1$, so erhält man die Formel

22) $$\frac{1}{2}\log(2 + 2\cos\psi) = \cos\psi - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{1}{3}\cos 3\psi - \ldots$$

welche ebenfalls noch gültig ist, da auch die Formeln 3) und 4) der früheren Note ihre Geltung behalten wenn $m = 1$, sobald nur $q$ positiv ist, und wir hier in der That kein negatives $q$ zu berücksichtigen brauchen. In einem bestimmten Falle jedoch hat die Gleichung 22) keinen Sinn mehr, obgleich jene Formeln ihre Geltung behalten, nemlich wenn $\psi = (2k + 1)\pi$ wo $k$ eine ganze Zahl bedeutet. Dann nemlich ist $\cos\psi = -1$, $\cos 2\psi = 1$, $\cos 3\psi = -1$, $\cos 4\psi = 1$ u. s. w. $\sin\psi = \sin 2\psi \ldots = 0$. Die Formel 3) verwandelt sich daher in

$$0 = 1 - {}^q\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^q\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots = (1-1)^q \qquad (\S.\ 63)$$

Die linke Seite der Gleichung 22) dagegen geht in $\frac{1}{2}\,lg\,(0)$ über, während die rechte Seite $-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots)$ also eine divergirende Reihe wird (§. 45). Der Grund dieser

Erscheinung liegt darin, dass weil nun $1 + 2m\cos\psi + m^2 = 0$ ist, der im Obigen benutzte Ausdruck $e^{\log(1+2m\cos\psi+m^2)}$ seine Bedeutung verliert.

Setzt man in 22) $\pi + \psi$ statt $\psi$ so erhält man

$$\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\psi) = -\cos\psi - \frac{1}{2}\cos 2\psi - \frac{1}{3}\cos 3\psi \ldots.$$

welche Formel nur dann ihre Bedeutung verliert, wenn $\psi = 2k\pi$, wo $k$ wieder eine ganze Zahl ist.

Setzt man in 21) $m = 1$ so folgt

23) $$\operatorname{Arc\,tg}\frac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi - \ldots.$$

Nun kann man, wie schon früher bemerkt wurde, $\sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi$, $1+\cos\psi = 2(\cos\frac{1}{2}\psi)^2$ setzen, woraus $\frac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}\psi} = tg\,\frac{1}{2}\psi$ folgt, vorausgesetzt, dass $\cos\frac{1}{2}\psi$ nicht Null ist, was für $\psi = \pm\pi$ der Fall seyn würde. So lange $\psi$ zwischen $-\pi$ und $\pi$ liegt, kann man also statt 23) schreiben

24) $\operatorname{Arc\,tg}(tg\,\frac{1}{2}\psi) = \sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi - \ldots.$

Man darf hierbei die Bedeutung von $\operatorname{Arc\,tg}(tg\,\frac{1}{2}\psi)$ nicht ausser Augen lassen, wodurch die kleinste Zahl, deren Tangente der Tangente von $\frac{1}{2}\psi$ gleich ist, bezeichnet wird. So lange $\psi$ zwischen $-\pi$ und $\pi$ liegt, also $\frac{\psi}{2}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, ist daher $\operatorname{Arc\,tg}(tg\,\frac{1}{2}\psi) = \frac{1}{2}\psi$ und mithin

25) $\frac{1}{2}\psi = \sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi \ldots\ldots.$

da es innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ nicht zwei Zahlen giebt, welche dieselbe Tangente haben (§. 105). Ist aber $\psi = \psi' \pm 2l\pi$, wo $\psi'$ eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegende Zahl bedeutet, so ist $tg\,\frac{1}{2}\psi = tg\,\frac{1}{2}\psi'$ und mithin $\operatorname{Arc\,tg}(tg\,\frac{1}{2}\psi) = \frac{1}{2}\psi'$ zu setzen, so dass man wieder mit Berücksichtigung der Gleichungen $\sin(\psi' \pm 2l\pi) = \sin\psi'$, $\sin 2(\psi' \pm 2l\pi) = \sin 2\psi'$ u.s.w. auf die Gleichung 25) zurückkommt.

Ist $\psi = \pm \pi$, so wird die Reihe $\sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi - \ldots$ wie jedes einzelne ihrer Glieder den Werth Null haben, die Formel 23) bleibt insofern richtig als $\frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergeht, mithin $Arc\ tg\ (\frac{0}{0})$ auch Null bedeuten kann. Dagegen ist nun die Formel 24) und die aus ihr folgende Formel 25) nicht mehr brauchbar.

Setzt man $\sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi \ldots = F(\psi)$ so ist zwischen den Grenzen $-\pi$ und $\pi$ diese Funktion von $\psi$ eine stetige, denn es ist $F\psi = \frac{1}{2}\psi$, $F(\psi - h) = \frac{1}{2}(\psi - h)$, also wenn $h$ unbegrenzt abnimmt, so nähert sich $F(\psi - h)$ dem $F\psi$ unbegrenzt. Bei den Werthen $\psi = \pm \pi$ hört aber die Stetigkeit auf, da $F(\pm \pi) = 0$ ist, während $F[\pm(\pi - h)] = \pm \frac{1}{2}(\pi - h)$ ist (Note VIII, §. 1).

## Note X.

### Die reciproken Potenzreihen und die Bernoullischen Zahlen.

1.

Aus der Formel 21) in Note VI folgt

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

und

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) + \ldots$$

Ist $x < \pi$ so kann man $\log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$, $\log\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)$ u. s. w. nach der Formel (§. 84)

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots$$

entwickeln, indem man allmälich $\frac{x^2}{\pi^2}$, $\frac{x^2}{2^2\pi^2}$ u. s. w. statt $x$ setzt, und findet demnach

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6} - \ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{2^2}\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^6}\frac{x^6}{\pi^6}-\ldots.$$

$$-\frac{1}{3^2}\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^4}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^6}\frac{x^6}{\pi^6}-\ldots.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Da nun diese Entwickelung eine Doppelreihe bildet, bei welcher alle Horizontalreihen convergiren sowie auch deren Summe, selbst wenn man alle Glieder positiv nimmt, so hat man, indem man die Verticalreihen addirt,

$$\log\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots.\right)$$

$$-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots.\right)$$

. . . . . . . . . . . . . .

oder wenn man

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots.=S_{2m}$$

setzt,

$$\log\frac{\sin x}{x}=-S_2\cdot\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}S_4\cdot\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}S_6\cdot\frac{x^6}{\pi^6}-\ldots..$$

Nun ist

$$\log\frac{\sin x}{x}=\log\left(1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}-\ldots..\right)$$

Setzt man also $x^2=u$, so hat man, wenn $x<\pi$,

$$\log\left(1-\frac{u}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{u^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}-\ldots.\right)$$

$$=-\frac{S_2}{\pi^2}u-\frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4}u^2-\frac{1}{3}\frac{S_6}{\pi^6}u^3-\ldots.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Formel 3) der Note VII, indem man $u$ statt des dortigen $x$ setzt, so ist nun $A_1=-\frac{1}{1.2.3}$, $A_2=\frac{1}{1.2.3.4.5}$, allgemein $A_r=(-1)^r\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots(2r+1)}$.

Ferner $a_1 = -\frac{S_2}{\pi^2}$, $a_2 = -\frac{S_4}{2\pi^4} \dots a_r = -\frac{1}{r}\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}}$. Die Formel 4) jener Note geht daher in

$$\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}} = (-1)^{r+1} \cdot \frac{r}{1.2.3\dots(2r+1)} + (-1)^r \cdot \frac{S_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1.2\dots(2r-1)}$$

$$+ (-1)^{r-1} \frac{S_4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{1\dots(2r-3)} \dots + (-1)^2 \frac{S_{2r-2}}{\pi^{2r-2}} \cdot \frac{1}{1.2.3}$$

oder in

$$1)\ (-1)^r \cdot \frac{r}{1.2\dots(2r+1)} = -\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}} + \frac{S_{2r-2}}{\pi^{2r-2}} \cdot \frac{1}{1.2.3} - \frac{S_{2r-4}}{\pi^{2r-4}} \cdot \frac{1}{1.2.3.4.5} \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{S_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1.2\dots(2r-1)}$$

über, wodurch eine recurrirende Formel für die Grössen $S_{2r}$, $S_{2r-2} \dots S_2$ gefunden ist. Ebenso giebt die Formel 5) jener Note eine independente Formel zur Berechnung von $S_{2r}$ nemlich

$$2) \qquad -\frac{1}{r}\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}} = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}\, {}^rCp^k$$

wo sich nun die Combinationen auf die Elemente $A_1 = -\frac{1}{1.2.3}$, $A_2 = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ u. s. w. beziehen.

Setzt man z. B. in letzterer Formel $r = 1$ so folgt

$$-\frac{S_2}{\pi^2} = {}^1Cp^1 = A_1 = -\frac{1}{1.2.3}$$

also

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Setzt man $r = 2$ so hat man

$$-\frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4} = {}^2Cp^1 - \frac{1}{2}{}^2Cp^2 = A_2 - \frac{1}{2}A_1A_1 = \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2$$

woraus

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

folgt. Bequemer ist es natürlich, sobald man einmal $S_2$ kennt, die folgenden Summen $S_4$ u. s. w. vermittelst der recurrirenden Formel 1) zu berechnen. Es giebt noch eine grosse Anzahl ähnlicher sowohl recurrirender als independenter Formeln; hier mögen noch folgende Platz finden.

Nach Formel 20) der Note VI ist

$$\cos x = \left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2}\right) \ldots .$$

Setzt man nun $2^2 x^2 < \pi^2$ d. h. $x < \frac{\pi}{2}$ so folgt

$$\log \cos x = \log\left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2}\right) + \ldots.$$

$$= - \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{\pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{\pi^6} - \ldots..$$

$$- \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{3^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{3^6 \pi^6} - \ldots..$$

$$- \frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{5^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{5^6 \pi^6} - \ldots..$$

Sey $s_{2r} = 1 + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \ldots..$

Setzt man nun $x^2 = u$ wonach

$$\cos x = 1 - \frac{u}{1.2} + \frac{u^2}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-1)^r u^r}{1.2..2r} \ldots$$

ist, so hat man

$$\log\left(1 - \frac{u}{1.2} + \frac{u^2}{1.2.3.4} \ldots + \frac{(-1)^r u^r}{1.2 \ldots 2r} \ldots\right)$$

$$= - \frac{2^2 s_2}{\pi^2} u - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 s_4}{\pi^4} u^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 s_6}{\pi^6} u^3 \ldots..$$

Mit Formel 3) der Note VII verglichen ist nun $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{1.2.3.4} \ldots A_r = (-1)^r \cdot \frac{1}{1.2 \ldots 2r}$ und $a_1 = -\frac{2^2 s_2}{\pi^2}$, $a_2 = -\frac{1}{2} \frac{2^4 s_4}{\pi^4} \ldots$ allgemein $a_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{2^{2r} s_{2r}}{\pi^{2r}}$

Demnach erhält man aus Formel 4) jener Note

$$3)\quad (-1)^r \cdot \frac{r}{1.2\ldots 2r} = -\frac{2^{2r} s_{2r}}{\pi^{2r}} + \frac{2^{2r-2} s_{2r-2}}{\pi^{2r-2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2^{2r-4} s_{2r-4}}{\pi^{2r-4}} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} \ldots$$
$$+ (-1)^{r-3} \frac{2^4 s_4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{1.2\ldots(2r-4)} + (-1)^{r-2} \frac{2^2 s_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1.2\ldots(2r-2)}$$

und aus der dortigen Formel 5)

$$4)\qquad -\frac{1}{r} \cdot \frac{2^{2r} s_{2r}}{\pi^{2r}} = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}\, {}^{r}C^{k}_{p}$$

wo sich die Combinationen auf die Elemente $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{1.2.3.4}$ u. s. w. beziehen. Nun steht aber die Grösse $s_{2r}$ in einer einfachen Beziehung zu $S_{2r}$. Wenn man nemlich von

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \ldots$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{2^{2r}} S_{2r} = \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \frac{1}{6^{2r}} + \ldots.$$

abzieht, so bleibt

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2r}}\right) S_{2r} = 1 + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \ldots\ldots = s_{2r}$$

so dass $s_{2r}$ bekannt ist, sobald man $S_{2r}$ kennt. Man findet also z. *B.*

$$s_2 = \frac{3}{4} S_2 = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

Setzt man in 3) statt $s_{2r}$ seinen Werth $\left(\frac{2^{2r}-1}{2^{2r}}\right) S_{2r}$ so geht sie in

5) $$(-1)^r \cdot \frac{r}{1.2\ldots 2r} = -(2^{2r}-1)\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}} + (2^{2r-2}-1)\frac{S_{2r-2}}{\pi^{2r-2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$-(2^{2r-4}-1)\frac{S_{2r-4}}{\pi^{2r-2}} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} \ldots + (-1)^{r-2}(2^2-1)\frac{S_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1.2\ldots(2r-2)}$$

über, wodurch also eine neue Recursionsformel zwischen den Grössen $S_{2r}$ $S_{2r-2}$ ... $S_2$ gefunden ist. Ebenso enthält Formel 4) eine neue independente Formel zur Berechnung von $S_{2r}$.

Zieht man von $S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \ldots$

den Ausdruck $2\frac{S_{2r}}{2^{2r}} = \frac{2}{2^{2r}} + \frac{2}{4^{2r}} + \frac{2}{6^{2r}} + \ldots$

ab, so folgt

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2r-1}}\right) S_{2r} = 1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \frac{1}{4^{2r}} + \ldots$$

Ist also z. B. $r = 1$ so findet man

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{1}{2} S_2 = \frac{\pi^2}{12}$$

2.

Die Summen $S_2$, $S_4 \ldots S_{2r}$ stehen in genauer Beziehung zu einer eigenthümlichen Zahlenreihe die man, nach Jakob Bernoulli (gest. 1705), der sich zuerst ihrer bediente, die Bernoullischen Zahlen nennt, und welche in vielen Untersuchungen der höheren Analysis vorkommen. Setzt man nemlich

6) $$\frac{1 \cdot 2 \ldots 2r}{2^{2r-1}} \cdot \frac{S_{2r}}{\pi^{2r}} = B_r$$

so ist $B_r$ die $r$te Bernoullische Zahl; man hat also

$$B_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^3} \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{30}$$

und kann überhaupt jedes $B_r$ aus dem bekannten $S_{2r}$ finden.

Da aus der Formel 2) folgt, dass $\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}}$ eine rationale Zahl ist,

so sind mithin nach Formel 6) auch die Bernoullischen Zahlen rational. Setzt man statt $\frac{S_{2r}}{\pi^{2r}}$ seinen Werth $\frac{2^{2r-1}B_r}{1.2\ldots 2r}$ so kann man aus dem Vorhergehenden sowohl recurrirende als independente Formeln zur Berechnung von $B_r$ finden. So folgt aus Formel 1)

$$(-1)^r \cdot \frac{r}{1.2\ldots(2r+1)} = -\frac{2^{2r-1}B_r}{1.2\ldots 2r} + \frac{2^{2r-3}B_{r-1}}{1.2\ldots(2r-2)} \cdot \frac{1}{1.2.3} \cdots\cdots$$
$$+ (-1)^r B_1 \cdot \frac{1}{1.2\ldots(2r-1)}$$

wofür man auch

$$7)\quad 2^{2r-1}B_r - 2^{2r-3} \cdot \frac{2r(2r-1)}{1.2.3} B_{r-1} + 2^{2r-5} \cdot \frac{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{1.2.3.4.5} B_{r-2} \cdots\cdot$$
$$+ (-1)^r \cdot \frac{r}{(2r+1)} = 0$$

schreiben kann. Aus 5) folgt ebenso

$$\frac{(-1)^r \cdot r}{1.2\ldots 2r} = -\frac{2^{2r}-1}{1.2\ldots 2r} 2^{2r-1} B_r + \frac{2^{2r-2}-1}{1.2\ldots(2r-2)} 2^{2r-3} \frac{B_{r-1}}{1.2}$$
$$-\frac{2^{2r-4}-1}{1.2\ldots(2r-4)} 2^{2r-5} \cdot \frac{B_{r-2}}{1.2.3.4} \ldots + (-1)^r \cdot \frac{2-1}{2}\, 2\, \frac{B_1}{1.2\ldots(2r-2)}$$

oder

$$8)\quad (2^{2r}-1)\,2^{2r-1} B_r - (2^{2r-2}-1)\,2^{2r-3} \cdot \frac{2r.(2r-1)}{1.2} B_{r-1}$$
$$+ (2^{2r-4}-1) 2^{2r-5} \cdot \frac{2r\ldots(2r-3)}{1.2.3.4} B_{r-2} \cdots\cdot + (-1)^{r-1} \cdot \frac{2r\ldots 1}{1\ldots(2r-2)} B_1$$
$$+ (-1)^r \cdot r = 0$$

die Formel 2) geht in

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{2^{2r-1}B_r}{1.2\ldots 2r} = \sum_{1,r}^{k} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\, {}^r C p^k$$

über und Aehnliches gilt von Formel 4) da $-\frac{1}{r}\, 2^{2r} \frac{s_{2r}}{\pi^{2r}}$ $= -\frac{1}{r}(2^{2r}-1) \frac{2^{2r-1}B_r}{1.2\ldots 2r}$ ist.

Die zehn ersten Bernoullischen Zahlen sind

$$B_1 = \frac{1}{6} \qquad B_6 = \frac{691}{2730}$$

$$B_2 = \frac{1}{30} \qquad B_7 = \frac{7}{6}$$

$$B_3 = \frac{1}{42} \qquad B_8 = \frac{3617}{510}$$

$$B_4 = \frac{1}{30} \qquad B_9 = \frac{43867}{798}$$

$$B_5 = \frac{5}{66} \qquad B_{10} = \frac{174611}{330}$$

In Crelle's Journal für die Mathematik Bd. 20 S. 11 findet man dieselben bis zur 31sten angegeben.

3.

Wie aus dem Vorhergehenden erhellt, lässt sich der Werth von $S_{2r}$ genau angeben sobald man die Zahl $\pi$ als bekannt voraussetzt. Nimmt man die Bernoullischen Zahlen zu Hülfe, so folgt aus Formel 6)

$$S_{2r} = B_r \,.\, \frac{2^{2r-1}\pi^{2r}}{1.2\ldots 2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \ldots\ldots$$

und hieraus folgt weiter

$$s_{2r} = \frac{2^{2r}-1}{2^{2r}} \,.\, B_r \,.\, \frac{2^{2r-1}\pi^{2r}}{1.2\ldots 2r} = 1 + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \ldots\ldots$$

Man nennt den Ausdruck $\frac{1}{k^n}$, wo $k$ und $n$ ganze positive Zahlen bedeuten, die **reciproke** $n$te Potenz der Zahl $k$ und die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots$$

die **reciproke $n$te Potenzreihe** aller ganzen Zahlen. Diese Reihe convergirt (§. 61) und ihr Werth soll durch $S_n$ bezeichnet werden. Während nun $S_n$, sobald $n$ eine **gerade** Zahl ist, wie eben nachgewiesen wurde, genau bestimmt werden kann, lässt sich diese Grösse, wenn $n$ ungerade ist, nur

näherungsweise bestimmen. Um so merkwürdiger ist es, dass sich die Summe aller dieser Reihen, wenn man allmälich für $n$ alle ganzen Zahlen 2, 3, 4 . . . . setzt, aber in jeder Reihe die Einheit weglässt, also der Werth der unendlichen Reihe

$$(S_2 - 1) + (S_3 - 1) + (S_4 - 1) + \ldots .$$

auf eine sehr einfache Weise angeben lässt. Setzt man zur Abkürzung

$$S_r - 1 = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots = \Sigma_r$$

so soll mithin der Werth der Reihe

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \ldots$$

bestimmt werden.

Man betrachte die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots \\ + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots \\ + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Hier convergiren sowohl die einzelnen Horizontalreihen als ihre Summe. Jede Horizontalreihe ist nemlich in der Form $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots$ enthalten, indem man allmälich 2, 3, 4...., statt $x$ setzt. Nun ist $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots . = \frac{1}{x-1}$ sobald $x > 1$ *). Mithin

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots . = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

die Summe sämmtlicher Horizontalreihen ist also

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots = 1$$

die Doppelreihe ist demnach convergent und zwar der Ein-

*) Dies folgt aus §. 47, wenn man dort in Formel 11) statt $x$ den Werth $\frac{1}{x}$ setzt.

heit gleich, und man erhält also denselben Werth, wenn man die Verticalreihen addirt, d. h.

9) $$1 = \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \ldots.$$

Dieser Satz lässt sich noch verallgemeinern. Bezeichnet $p$ eine positive Zahl und man bildet die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^4} + \ldots. \\ + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^4} + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so ist allgemein

$$\frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p+k)^3} + \frac{1}{(p+k)^4} + \ldots. = \frac{1}{p+k-1} - \frac{1}{p+k}$$

mithin convergiren die einzelnen Horizontalreihen, und ihre Summe ist

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) + \ldots. = \frac{1}{p}$$

Es convergirt also auch die Doppelreihe, ihre Summe $\frac{1}{p}$ ist zugleich die Summe der Verticalreihen, welche ebenfalls convergiren müssen. Setzt man daher

$$\frac{1}{(p+1)^k} + \frac{1}{(p+2)^k} + \frac{1}{(p+3)^k} + \ldots. = \Sigma\,(p+1)^{-k}$$

so hat man

10) $$\Sigma\,(p+1)^{-2} + \Sigma\,(p+1)^{-3} + \Sigma\,(p+1)^{-4} + \ldots = \frac{1}{p}$$

Im Folgenden wollen wir aber bei der Voraussetzung $p = 1$ stehen bleiben.

### 4.

Betrachtet man die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots.. \\ + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots.. \\ + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so findet man ebenfalls dass sie convergirt. Hier ist der Werth einer Horizontalreihe

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x^2)^2}+\frac{1}{(x^2)^3}+\ldots=\frac{1}{x^2-1}$$

also, indem man statt $x$ allmälich 2, 3, 4... setzt, der Werth der Doppelreihe,

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots$$

Nun ist $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ also

11) $$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots=\frac{1}{2}$$

12) $$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots=\frac{1}{4}$$

und der Werth der Doppelreihe $=\frac{3}{4}$. Dies ist zugleich der Werth der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots$ und der Werth der Summe der Verticalreihen, d. h. man hat

13) $$\frac{3}{4}=\Sigma_2+\Sigma_4+\Sigma_6+\ldots\ldots$$

Da

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\ldots=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots\right)=\frac{1}{x(x^2-1)}$$

so ergiebt sich auch, dass die Doppelreihe

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots\\+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}+\ldots\\+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^7}+\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

convergirt und ihre Summe

$$\frac{1}{2(2^2-1)}+\frac{1}{3(3^2-1)}+\frac{1}{4(4^2-1)}+\ldots=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{4.15}+\ldots.$$

ist. Da aber $\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ ist, so kann man statt dessen auch

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots=\frac{1}{4}$$

setzen, und man hat daher

14) $$\frac{1}{4}=\Sigma_3+\Sigma_5+\Sigma_7+\ldots.$$

Ferner, wenn man 14) von 13) abzieht,

15) $$\frac{1}{2}=\Sigma_2-\Sigma_3+\Sigma_4-\Sigma_5+\ldots.$$

5.

Man kann dem durch Formel 9) angedeuteten Satz noch einen anderen Ausdruck geben. Setzt man nemlich in dem Bruche $\frac{1}{x^n-1}$ für $n$ alle ganzen Zahlen von 2 an, und für $x$ alle ganzen Zahlen die $>1$ jedoch keine höhere Potenz einer Zahl sind, so wird die Summe aller so erhaltenen Brüche der Einheit gleich seyn. Denn man bezeichne diese Summe durch $\Sigma\frac{1}{x^n-1}$. Nun ist

$$\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{(x^n)^2}+\frac{1}{(x^n)^3}+\ldots=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{(x^2)^n}+\frac{1}{(x^3)^n}+\ldots$$

also

$$\Sigma\frac{1}{x^n-1}=\Sigma\frac{1}{x^n}+\Sigma\frac{1}{(x^2)^n}+\Sigma\frac{1}{(x^3)^n}+\ldots.$$

Nun bedeutet $\Sigma\frac{1}{x^n}$ die Summe aller reciproken Potenzen, von der zweiten an, aller Zahlen, von 2 an, welche keine höhere Potenz sind, $\Sigma\frac{1}{(x^2)^n}$ die Summe aller reciproken Potenzen, von der zweiten an, aller Zahlen, von 2 an, welche die zweite, und keine höhere Potenz einer Zahl sind, in demsel-

ben Sinne enthält $\Sigma\frac{1}{(x^3)^n}$ die Summe aller reciproken Potenzen aller Zahlen, welche die dritte und keine höhere Potenz einer Zahl sind u. s. w. Die Summe aller dieser Reihen ist also nichts Anderes als die Summe aller reciproken Potenzen, von der zweiten an, aller ganzen Zahlen von 2 an, und daher nach Formel 9)

16) $$\Sigma\frac{1}{x^n-1}=1$$

Würde man die in $\Sigma\frac{1}{x^n-1}$ enthaltenen Brüche nach ihrer Grösse ordnen, so hätte man zuerst $x=2$, $n=2$ zu setzen, dies giebt $\frac{1}{3}$, dann $x=2$, $n=3$, dies giebt $\frac{1}{7}$, dann $x=3$, $n=2$ giebt $\frac{1}{8}$, ferner $x=2$, $n=4$ giebt $\frac{1}{15}$ u. s. w. so dass

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots.$$

Versteht man unter $\Sigma\frac{1}{x^{2n}-1}$ die Summe aller Brüche, die man erhält, wenn man für $n$ alle ganzen Zahlen, für $x$ alle ungeraden Zahlen, die grösser als 1 und keine höhere Potenz sind, setzt, so ist

$$\Sigma\frac{1}{x^{2n}-1}=\Sigma\frac{1}{x^{2n}}+\Sigma\frac{1}{(x^2)^{2n}}+\Sigma\frac{1}{(x^3)^{2n}}+\ldots$$

nun bedeuten $\Sigma\frac{1}{x^{2n}}$, $\Sigma\frac{1}{(x^2)^{2n}}\ldots$ bezüglich die Summe aller reciproken geraden Potenzen aller ungeraden Zahlen, von 3 an, die keine höhere Potenz, oder die zweite und keine höhere Potenz sind u. s. w. Die Summe aller dieser Summen ist also nichts Anderes als die Summe aller reciproken geraden Potenzen aller ungeraden Zahlen von 3 an, d. h.

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(3^2)^2}+\frac{1}{(3^3)^2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{(5^2)^2}+\frac{1}{(5^3)^2}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \ldots = \frac{1}{4} \text{ (Form. 12) also}$$

17) $$\Sigma \frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{4}$$

Man findet ebenso als Werth der Summe aller reciproken geraden Potenzen aller geraden Zahlen, die Reihe

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \ldots = \frac{1}{2} \text{ (Form. 11)}$$

6.

Bezeichnet man durch $\Sigma' r$ die Reihe $\frac{1}{2^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{6^r} + \ldots$ oder die reciproke $r$te Potenzreihe aller geraden Zahlen, so wird die Doppelreihe

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots \\ +&\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots \\ +&\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

den Werth von $\Sigma'2 + \Sigma'4 + \ldots$ angeben. Addirt man aber die Horizontalreihen nach der Formel

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

indem man allmälich $x = 2, 4, 6 \ldots$ setzt, so erhält man als Werth der Doppelreihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots = \log 2 \text{ (§. 83)}$$

also

18) $$\Sigma'2 + \Sigma'3 + \Sigma'4 \ldots = \log 2$$

Bezeichnet man durch $\Sigma'' r$ die reciproke $r$te Potenzenreihe aller ungeraden Zahlen von 3 an, so dass

$\Sigma'' r = \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{7^r} + \ldots$ so ist mithin $\Sigma'' r = \Sigma r - \Sigma' r$

und man hat, nach Formel 9) und 18)

19) $\Sigma''2 + \Sigma''3 + \Sigma''4 + \ldots. = 1 - \log 2$

der am Ende des vorhergehenden § gefundene Satz heisst nun

20) $\Sigma'2 + \Sigma'4 + \Sigma'6 + \ldots. = \frac{1}{2}$

und statt der Formel 17) kann man auch schreiben

21) $\Sigma''2 + \Sigma''4 + \Sigma''6 + \ldots. = \frac{1}{4}$

Zieht man 20) von 18) ab, so folgt

22) $\Sigma'3 + \Sigma'5 + \ldots. = \log 2 - \frac{1}{2}$

Zieht man 21) von 19) ab, so hat man

23) $\Sigma''3 + \Sigma''5 + \ldots. = \frac{3}{4} - \log 2$

Man findet nach den früheren Erörterungen leicht, dass man statt 18) auch $\Sigma \frac{1}{x^n - 1}$ schreiben kann, wenn man hierunter die Summe aller Brüche versteht, die man erhält, indem man statt $n$ alle ganzen Zahlen von 2 an, und statt $x$ alle **geraden** Zahlen, die keine höhere Potenz sind, setzt, so wie man statt 19) ebenfalls $\Sigma \frac{1}{x^n - 1}$ setzen kann, wenn damit die Summe aller Brüche bezeichnet wird, welche man erhält, wenn man statt $n$ alle ganzen Zahlen von 2 an und statt $x$ alle **ungeraden** Zahlen, die keine höhere Potenz sind, setzt.

Setzt man in

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots. = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

statt $x$ allmälich die Werthe 2, 6, 10 . . ., d. h. alle ganzen Zahlen von der Form $4n + 2$, so folgt

24) $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{\pi}{8}$

(Note IX Form. 10).

Zieht man diesen Ausdruck von 11) ab, so hat man

25) $\frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \ldots. = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

wo nun für $x$ alle Zahlen von der Form $4n$ gesetzt sind.

Setzt man statt $x$ allmälich 3, 7, 11, 15 . . . d. h. alle ganzen Zahlen von der Form $4n+3$ so findet man

$$26)\quad \frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\frac{1}{11^2-1}+\ldots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\right)=\frac{1}{4}\log 2$$

und wenn man diesen Ausdruck von 12) abzieht

$$27)\quad \frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{9^2-1}+\frac{1}{13^2-1}+\ldots=\frac{1}{4}(1-\log 2)$$

hier sind für $x$ alle Zahlen von der Form $4n+1$ gesetzt.

## 7.

Wenn man in der Formel

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\ldots$$

$-x$ statt $x$ setzt, so wird sie

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\ldots$$

hieraus folgt

$$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3+1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\ldots$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\ldots$$

$$-\frac{1}{8}=-\frac{1}{7+1}=-\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}-\ldots$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9-1}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}+\ldots$$

. . . . . . . . . . . . . .

Denkt man sich diese Entwickelung ins Unendliche fortgesetzt, indem man allmälich statt $n$ die Werthe 0, 1, 2, 3... setzend, die Brüche $-\frac{1}{4n+3+1}$, $\frac{1}{4n+5-1}$ in der angegebenen Weise entwickelt, und addirt man alsdann alle Ausdrücke, so heben sich die links stehenden auf, und man erhält demnach

$$0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun ist

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots=(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots.)-1=\frac{\pi}{4}-1$$

also

28) $$\frac{\pi}{4}-1 = -\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4}\ldots.$$
$$-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4}\ldots.$$
$$-\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4}\ldots.$$
$$-\frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{9^4}\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In dieser Entwickelung sind alle geraden Potenzen negativ, die ungeraden positiv oder negativ, je nachdem sie zu Zahlen von der Form $4n+3$ oder von der Form $4n+1$ gehören.

Man hat ferner nach Formel 12)

29) $$\frac{1}{4} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Verbindet man 28) und 29) durch Addition, so folgt

30) $$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \ldots.$$

$$-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^5}-\frac{1}{5^7}+\dots$$
$$+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{7^7}+\dots$$
$$-\frac{1}{9^3}-\frac{1}{9^5}-\frac{1}{9^7}+\dots$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit 23) durch Addition, so folgt

31) $\frac{\pi}{4}-\log 2=2\left[\frac{1}{3^3}+\frac{1}{7^3}+\dots+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7^5}+\dots+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{7^7}+\dots\right]$

wo nun alle ungeraden reciproken Potenzen aller Zahlen von der Form $4n+3$ vorkommen. Nun ist aber zu bemerken, dass $(4n+3)^2$, und ebenso jede gerade Potenz von $4n+3$, in der Form $4n+1$ enthalten ist, während $(4n+3)^3$ und ebenso jede ungerade Potenz von $4n+3$ wieder in der Form $4n+3$ enthalten ist. Man wird daher statt 31) auch schreiben können

$$\frac{\pi}{4}-\log 2=2.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{(3^3)^3}+\frac{1}{(3^5)^3}+\dots\\+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{(3^3)^5}+\frac{1}{(3^5)^5}+\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{(7^3)^3}+\frac{1}{(7^5)^3}+\dots\\+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{(7^3)^5}+\frac{1}{(7^5)^5}+\dots\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

oder

$$\frac{\pi}{4}-\log 2=\frac{1}{3^3-1}+\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{3^5-1}+\frac{1}{3^5+1}+\dots$$
$$+\frac{1}{7^3-1}+\frac{1}{7^3+1}+\frac{1}{7^5-1}+\frac{1}{7^5+1}+\dots$$

indem man nur diejenigen Zahlen von der Form $4n+3$ benutzt, die keine höhere Potenz sind. Man kann dies in Zeichen, wie folgt, ausdrücken. Versteht man unter $\Sigma\frac{1}{x^{2n+1}-1}$

und $\Sigma \frac{1}{x^{2n+1}+1}$ die Summe aller Brüche, die man erhält, indem man in diesen Ausdrücken statt $x$ nur solche Zahlen von der Form $4n+3$ nimmt, die keine höhere Potenz sind, statt $n$ alle ganzen positiven Zahlen, so ist

$$32)\quad \frac{\pi}{4} - \log 2 = \Sigma \frac{1}{x^{2n+1}-1} + \Sigma \frac{1}{x^{2n+1}+1}$$

$$= \Sigma \left(\frac{1}{x^{2n+1}-1} + \frac{1}{x^{2n+1}+1}\right) = \Sigma \frac{2 . x^{2n+1}}{x^{4n+2}-1}$$

Dieser Satz ist von Euler*). Man kann durch ähnliche Betrachtungen noch drei andere Sätze finden, die ihn gewissermassen ergänzen. Zieht man 30) von 23) ab, so ergiebt sich

$$33)\quad \frac{3}{2} - \log 2 - \frac{\pi}{4} = 2\left[\frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \ldots + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{9^5} + \ldots + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9^7} + \ldots\right]$$

Hier kommen alle ungeraden reciproken Potenzen aller Zahlen von der Form $4n+1$ vor. Da nun jede Potenz einer Zahl von der Form $4n+1$ wieder von der Form $4n+1$ ist, so hat man auch

$$\frac{3}{2} - \log 2 - \frac{\pi}{4} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5^3} + \frac{1}{(5^2)^3} + \frac{1}{(5^3)^3} + \ldots \\ + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{(5^2)^5} + \frac{1}{(5^3)^5} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{(9^2)^3} + \frac{1}{(9^3)^3} + \ldots \\ + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{(9^2)^5} + \frac{1}{(9^3)^5} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Versteht man daher unter $\Sigma \frac{1}{x^{2n+1}-1}$ die Summe aller Brüche, die man erhält, indem man für $x$ alle Zahlen von der Form $4n+1$ (die Einheit ausgeschlossen) die keine höhere Potenz sind, für $n$ alle ganzen Zahlen setzt, so ist

*) Comm. Acad. Petrop. T. 9 p. 170.

34) $$\frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{8} = \Sigma \frac{1}{x^{2n+1} - 1}$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} \cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{4-1} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{6+1} = \frac{1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} - \frac{1}{6^4} \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{8-1} = -\frac{1}{7} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{8^3} - \frac{1}{8^4} \cdots\cdots$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Addirt man diese Ausdrücke und berücksichtigt die Gleichung

$$\frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \log 2 = &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \\ &- \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\cdots \\ &- \frac{1}{2^5} + \frac{1}{4^5} - \frac{1}{6^5} + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

aber nach Formel 11)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^4} + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Subtrahirt man von diesem Ausdruck den vorhergehenden, so folgt

$$35)\quad \frac{1}{2}(1 - \log 2) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$
$$- \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^5} - \frac{1}{4^7} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^5} + \frac{1}{6^7} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je nachdem man diesen Ausdruck zu 22) addirt oder davon abzieht, findet man

$$36)\quad \frac{1}{2}\log 2 = 2\left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^5} + \frac{1}{6^7} + \cdots\right]$$

$$37)\quad \frac{3}{2}\log 2 - 1 = 2\left[\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^7} + \cdots + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^5} + \frac{1}{8^7} + \cdots\right]$$

In 36) kommen alle ungeraden reciproken Potenzen (von der dritten an) aller geraden Zahlen von der Form $4n + 2$ vor, in 37) aller geraden von der Form $4n$.

Nun sind aber die Potenzen einer Zahl von der Form $4n$ wieder von dieser Form. Statt der letzteren Formel kann man daher auch schreiben

$$\frac{3}{2}\log 2 - 1 = 2\left[\frac{1}{4^3 - 1} + \frac{1}{8^3 - 1} + \frac{1}{12^3 - 1} \cdots + \frac{1}{4^5 - 1} + \frac{1}{8^5 - 1} + \frac{1}{12^5 - 1} + \cdots\right]$$

indem man nur die Zahlen 4, 8, 12 u. s. w. benutzt, welche keine höhere Potenz einer Zahl von der Form $4n$ sind. Man hat daher

$$38)\quad \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{2} = \Sigma \frac{1}{x^{2n+1} - 1}$$

wenn man für $x$ alle Zahlen von der Form $4n$ nimmt, die keine höhere Potenz einer Zahl dieser Form sind, und für $n$ alle ganzen positiven Zahlen.

## 8.

Fasst man die wesentlichsten Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammen, so hat man folgende Sätze.

Wenn man die Einheit sowohl als Basis wie als Exponent ausschliesst, so ist die Summe der

reciproken Potenzen aller ganzen Zahlen $= 1$ (Form. 9)

reciproken geraden Potenzen aller ganzen Zahlen $= \frac{3}{4}$ (Form. 13)

reciproken ungeraden Potenzen aller ganzen Zahlen $= \frac{1}{4}$ (Form. 14)

reciproken Potenzen aller geraden Zahlen $= \log 2$ (Form. 18)

reciproken geraden Potenzen aller geraden Zahlen $= \frac{1}{2}$ (Form. 20)

reciproken ungeraden Potenzen aller geraden Zahlen $= \log 2 - \frac{1}{2}$ (Form. 22)

reciproken Potenzen aller ungeraden Zahlen $= 1 - \log 2$ (Form. 19)

reciproken geraden Potenzen aller ungeraden Zahlen $= \frac{1}{4}$ (Form. 21)

reciproken ungeraden Potenzen aller ungeraden Zahlen $= \frac{3}{4} - \log 2$ (Form. 23)

reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n + 3$ $= \frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{2}$ (Form. 31)

reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n + 3 = \frac{\log 2}{4}$ (Form. 26)

reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n + 1$ $= \frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{8}$ (Form. 33)

reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n + 1$ $= \frac{1}{4}(1 - \log 2)$ (Form. 27)

reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n + 2$ $= \frac{\log 2}{4}$ (Form. 36)

reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n + 2 = \frac{\pi}{8}$ (Form. 24)

reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n$

$$= \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{2} \text{ (Form. 37)}$$

reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ (Form. 25)

Man sieht leicht, dass sich aus dieser Zusammenstellung noch verschiedene merkwürdige Sätze ableiten lassen. So z.B. folgt unmittelbar, dass die Summe der reciproken geraden Potenzen der Zahlen von der Form $4n+3$ der Summe der reciproken ungeraden Potenzen der Zahlen von der Form $4n+2$ gleich ist.

9.

Aus den Formeln

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots.$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \dots.$$

folgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \dots = \frac{1}{(x-1)x(x+1)}$$

setzt man hier statt $x$ die Zahlen 2, 3, 4 .... so folgt

$$\Sigma 3 + \Sigma 5 + \Sigma 7 + \dots = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots$$

also nach Form. 14)

39) $$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots = \frac{1}{4}$$

setzt man $x = 2, 4, 6 \dots$ so folgt aus Form. 22)

40) $$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \dots = \log 2 - \frac{1}{2}$$

und wenn man $x = 3, 5, 7 \dots$ setzt, aus Form. 23)

41) $$\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \dots = \frac{3}{4} - \log 2$$

Setzt man $x = 2, 6, 10 \dots$ so ist (Form. 36)

42) $$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \dots = \frac{\log 2}{4}$$

setzt man $x = 4, 8, 12 \ldots$ nach Form. 37)

$$43) \quad \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \ldots = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{2}$$

setzt man $x = 3, 7, 11 \ldots$ nach Form. 31)

$$44) \quad \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \ldots = \frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{2}$$

setzt man $x = 5, 9, 13 \ldots$ nach Form. 33)

$$45) \quad \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \ldots = \frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{8}$$

In der Regel leitet man die Werthe dieser Reihen aus viel höheren Betrachtungen ab. Man sieht leicht, dass sich aus ihnen wieder andere merkwürdige Reihen ableiten lassen. So z. B. folgt aus 42) und 43)

$$\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} - \frac{1}{7.8.9} \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$$

aus 44) und 45)

$$\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \frac{1}{8.9.10} + \ldots = \frac{\pi - 3}{4}$$

## 10.

Versteht man unter $\Sigma \frac{1}{x^{2n} - 1}$ die Summe der Brüche, welche man erhält, wenn man für $x$ alle ganzen Zahlen die $>$ 1 und keine höhere Potenz sind, für $n$ alle ganzen Zahlen $>1$ setzt, so ist zunächst wegen $\frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^n-1} - \frac{1}{x^n+1}\right)$.

auch $\Sigma \frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{x^n-1} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{x^n+1}$, da aber

$$\frac{1}{x^n - 1} - \frac{1}{x^n + 1} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{3n}} + \frac{1}{x^{4n}} \ldots$$

$$- \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{3n}} - \frac{1}{x^{4n}} - \ldots\right) = 2\left(\frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{4n}} + \ldots\right)$$

so ist

$$\Sigma \frac{1}{x^{2n}-1} = \Sigma \frac{1}{x^{2n}} + \Sigma \frac{1}{x^{4n}} + \Sigma \frac{1}{x^{6n}} \ldots .$$

$$= \Sigma \frac{1}{x^{2n}} + \Sigma \frac{1}{(x^2)^{2n}} + \Sigma \frac{1}{(x^3)^{2n}} + \ldots$$

indem man aber in dem letzten Ausdrucke die angegebenen Werthe von $x$ und $n$ substituirt, erhält man offenbar die Summe aller reciproken geraden Potenzen aller Zahlen, die reciproken zweiten Potenzen ausgenommen. Die Summe der letzteren ist aber

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 1 \quad (\text{§. 1 dieser Note})$$

Mithin nach Formel 13)

46) $$\Sigma \frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$$

und nach 16)

47) $$\Sigma \frac{1}{x^n+1} = \Sigma \frac{1}{x^n-1} - 2\Sigma \frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}$$

ferner

48) $$\Sigma \frac{x^n}{x^{2n}-1} = \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4}$$

Sucht man, unter Beibehaltung derselben Bedeutung von $x$ und $n$, den Werth von $\Sigma \frac{n-1}{x^n-1}$ also von $\Sigma \frac{1}{x^2-1} + \Sigma \frac{2}{x^3-1} + \Sigma \frac{3}{x^4-1} + \ldots$ so bemerke man, dass $\Sigma \frac{1}{x^2-1} = \Sigma \frac{1}{x^2} + \Sigma \frac{1}{(x^2)^2} + \Sigma \frac{1}{(x^3)^2} + \ldots = \Sigma_2$ ist, ebenso $\Sigma \frac{2}{x^3-1} = 2\Sigma_3$, $\Sigma \frac{3}{x^4-1} = 3\Sigma_4$ u.s.w. also

49) $$\Sigma \frac{n-1}{x^n-1} = \Sigma_2 + 2\Sigma_3 + 3\Sigma_4 + \ldots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$
$$+ 2.\frac{1}{2^3} + 2.\frac{1}{3^3} + 2.\frac{1}{4^3} + \ldots$$
$$+ 3.\frac{1}{2^4} + 3.\frac{1}{3^4} + 3.\frac{1}{4^4} + \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Setzt man

$$Sk = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^4} + \ldots\ldots$$

so ist mithin

$$\Sigma \frac{n-1}{x^n - 1} = S2 + S3 + S4 + \ldots\ldots$$

Nun ist

$$(1 - \frac{1}{k})\, Sk = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \ldots = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$$

also

$$Sk = \frac{1}{(k-1)^2}$$

und

50) $$\Sigma \frac{n-1}{x^n - 1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Ebenso findet man $\Sigma \frac{(-1)^n (n-1)}{x^n - 1}$. Setzt man nemlich

$$S_1 k = \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^4} - \ldots\ldots$$

so ist

$$\Sigma \frac{(-1)^n (n-1)}{x^n - 1} = S_1 2 + S_1 3 + S_1 4 + \ldots\ldots$$

Nun ist

$$(1 + \frac{1}{k})\, S_1 k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} - \ldots\ldots = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_1 k = \frac{1}{(k+1)^2}$$

also

51) $$\Sigma \frac{(-1)^n (n-1)}{x^n - 1} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - (1 + \frac{1}{2^2}) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

Zugleich ist

52) $$\Sigma \frac{(-1)^n (n-1)}{x^n - 1} = \Sigma_2 - 2\Sigma_3 + 3\Sigma_4 - 4\Sigma_5 + \ldots$$

Verbindet man die Formeln 49) und 52) durch Addition und Subtraktion, so folgt daher mit Rücksicht auf 50) und 51)

53) $$\Sigma_2 + 3\Sigma_4 + 5\Sigma_6 + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{8}$$

54) $\Sigma_3 + 2\Sigma_5 + 3\Sigma_7 + \ldots = \frac{5}{16}$

Zieht man 13) von 53) ab, so folgt

55) $\Sigma_4 + 2\Sigma_6 + 3\Sigma_8 + \ldots. = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16}$

und, wenn man 14) von 54) abzieht,

56) $\Sigma_5 + 2\Sigma_7 + 3\Sigma_9 + \ldots. = \frac{1}{16}$

Aus 53) folgt noch, wegen $\Sigma_2 = \frac{\pi^2}{6} - 1$,

57) $3\Sigma_4 + 5\Sigma_6 + 7\Sigma_8 \ldots = \frac{3}{8} = \Sigma_3 + 3\Sigma_5 + 5\Sigma_7 \ldots$

wie sich aus der Addition von 54) und 56) ergiebt.

Multiplicirt man 54) mit 2 und zieht den erhaltenen Werth von 53) ab, so ergiebt sich

$$\Sigma_2 - 2\Sigma_3 + 3\Sigma_4 - 4\Sigma_5 + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

Versteht man unter $\Sigma \frac{a-1}{a^r}$ die Summe aller Brüche, die man erhält, wenn man statt $a$ alle ganzen Zahlen von 2 an setzt, so findet man, wenn man

57) $\Sigma_3 + 3\Sigma_5 + 5\Sigma_7 + \ldots. = \frac{3}{8}$

von 53) abzieht,

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 + 3(\Sigma_4 - \Sigma_5) + 5(\Sigma_6 - \Sigma_7) + \ldots.$$
$$= \Sigma\frac{a-1}{a^3} + 3\Sigma\frac{a-1}{a^5} + 5\Sigma\frac{a-1}{a^7} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \Sigma_2$$

und mithin

$$\Sigma_3 = 3\Sigma_4 - 3\Sigma_5 + 5\Sigma_6 - 5\Sigma_7 + \ldots.$$

Man kann die Formel 55) noch unter eine andere Form bringen. Versteht man nemlich wieder unter $x$ jede ganze Zahl $> 1$, die keine höhere Potenz ist, so hat man

$$\Sigma_4 = \Sigma\frac{1}{x^4-1} = \Sigma\frac{1}{x^4} + \Sigma\frac{1}{(x^2)^4} + \Sigma\frac{1}{(x^3)^4} + \ldots.$$

$$\Sigma_6 = \Sigma\frac{1}{x^6-1}$$

u. s. w.

mithin

$$\Sigma_4 + 2\Sigma_6 + 3\Sigma_8 + \ldots = \Sigma\frac{1}{x^4-1} + 2\Sigma\frac{1}{x^6-1} + \ldots = \Sigma\frac{n-1}{x^{2n}-1}$$

wenn man für $n$ alle ganzen Zahlen von 2 an setzt. Mithin

$$58) \qquad \Sigma\frac{n-1}{x^{2n}-1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16}$$

Nun ist $\frac{n-1}{x^n-1} - \frac{n-1}{x^n+1} = \frac{2(n-1)}{x^{2n}-1}$ also

$$59) \quad \Sigma\frac{n-1}{x^n+1} = \Sigma\frac{n-1}{x^n-1} - 2\Sigma\frac{n-1}{x^{2n}-1} = \frac{11}{8} \text{ (Form. 50 und 58)}$$

Diese Formeln liessen sich noch sehr vermehren.

## Note XI.

### Der Cotesische und Moivre'sche Lehrsatz.

1.

In §. 108 wurde gezeigt, dass der Ausdruck $1^{\frac{1}{n}}$ immer $n$ verschiedene Werthe hat, welche in der Form $e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ oder $\cos\frac{2l\pi}{n} + \sin\frac{2l\pi}{n}i$ enthalten sind, wo für $l$ die Zahlen 0, 1, 2 ... $n-1$ zu setzen sind. Bezeichnet man irgend einen dieser Werthe durch $x$, so sagt dies, dass der Gleichung $x^n = 1$ oder $x^n - 1 = 0$ durch die verschiedenen in der Form $x = e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ enthaltenen Werthe Genüge geleistet wird. Verbindet man hiermit den in §. 1 der Note VI bewiesenen Satz, so folgt, dass man den Ausdruck $x^n - 1$ als ein Produkt von $n$ Faktoren darstellen kann, die sämmtlich in der Form $x - e^{\frac{2l\pi i}{n}}$ enthalten sind. Unterscheidet man, wie in §. 108, zwei Fälle, je nachdem $n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, so hat man, wenn $n = 2m$, die zwei Werthe $x = 1$ und $x = -1$, die übrigen $n - 2$ Werthe sind in der Form $\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}i$ enthalten, wo für $k$ die Wer-

the 1 bis $\frac{n-2}{2}$ zu setzen sind. Das Produkt der zwei Faktoren $x - \cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}i$ und $x - \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}i$ ist aber $(x - \cos\frac{2k\pi}{n})^2 + (\sin\frac{2k\pi}{n})^2 = x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}x + 1$ und da $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ so hat man mithin

$$1)\quad x^{2m} - 1 = (x^2-1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{2m}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{2m}x+1)\ldots (x^2 - 2\cos\frac{2(m-1)\pi}{2m}x + 1)$$

Ist dagegen $n$ ungerade $= 2m+1$, so hat man ausser dem Werthe $x = 1$ noch $n - 1$ Werthe, die in der Form $\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}i$ enthalten sind, wo für $k$ alle Werthe von $k = 1$ bis $k = m$ zu setzen sind, also ist

$$2)\quad x^{2m+1} - 1 = (x-1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{2m+1}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{2m+1}x+1)\ldots (x^2 - 2\cos\frac{2m\pi}{2m+1}x + 1)\quad .$$

Nach §. 113, II findet man ferner, aus den dort entwickelten Werthen von $(-1)^{\frac{1}{n}}$, dass $x^n + 1$ sich in $n$ Faktoren zerlegen lässt, und zwar, wenn $n = 2m$, sind die Werthe von $x$ in der Form $x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2m} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{2m}i$ enthalten, wo man für $k$ alle Werthe von $k = 0$ bis $k = m-1$ zu setzen hat. Ist dagegen $n$ ungerade $= 2m+1$, so hat man ausser dem Werthe $x = -1$, noch $2m$ Werthe, die in der Form $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}i$ enthalten sind, wo wieder für $k$ alle Werthe von $k = 0$ bis $k = m - 1$ zu setzen sind. Demnach ist

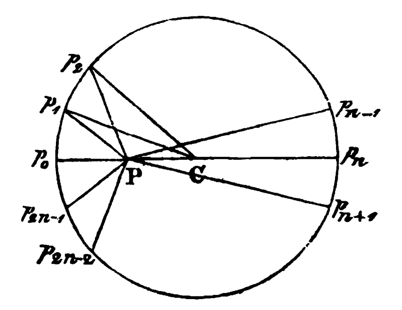
$$3)\quad x^{2m} + 1 = (x^2 - 2\cos\frac{\pi}{2m}x + 1)(x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{2m}x + 1)\ldots (x^2 - 2\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}x + 1)$$

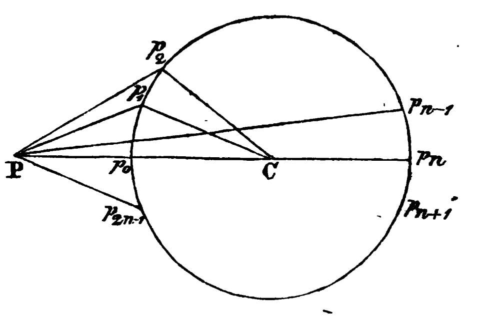
4) $x^{2m+1}+1=(x+1)(x^2-2\cos\frac{\pi}{2m+1}x+1)(x^2-2\cos\frac{3\pi}{2m+1}x+1)\ldots$

$$(x^2-2\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}x+1)$$

## 2.

Diese Sätze lassen eine interessante geometrische Deutung zu. Man denke sich nemlich einen Kreis mit dem Mittelpunkt $C$, dessen Halbmesser $=1$ gesetzt wird, und dessen Umfang in $2n$ gleiche Theile (also der halbe Umfang in $n$ gleiche Theile) getheilt ist. Seyen $p_0p_1$; $p_1p_2$;... $p_{n-1}p_n$ diese gleichen Theile, der Winkel $p_0Cp_1$ ist also $\frac{\pi}{n}$, $p_0Cp_2=\frac{2\pi}{n}$ u.s.w. Man nehme nun einen Punkt $P$, innerhalb oder ausserhalb des Kreises, auf dem Durchmesser $p_0p_n$ oder dessen Verlängerung und ziehe die Linien $Pp_1$; $Pp_2$;..$Pp_{n-1}$ so ist, nach einem bekannten Elementarsatze, in dem Dreiecke $Pp^1C$, $(Pp_1)^2=PC^2+Cp_1{}^2-2PC\,.\,Cp^1\cos p^1Cp_0$, also wenn man $PC=x$ setzt,




$$(Pp_1)^2=x^2-2\cos\frac{\pi}{n}x+1$$

$$(Pp_2)^2=x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1$$

. . . . . . . . . . .

$$(Pp_{n-1})^2=x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1$$

Man nehme zuerst an der Punkt $P$ liege **innerhalb** des Kreises.

Ist also $n$ eine gerade Zahl $= 2m$ so hat man, da $x^2 - 1 = PC^2 - p_0C^2 = (PC + p_0C)(PC - p_0C) = Pp_0 . Pp_n$, nach 1)

$$x^{2m} - 1 = (PC)^{2m} - (p_0C)^{2m} = - Pp_0(Pp_2)^2(Pp_4)^2 \ldots (Pp_{n-2})^2 Pp_n$$

oder

$$5)\quad (p_0C)^{2m} - (PC)^{2m} = Pp_0(Pp_2)^2(Pp_4)^2 \ldots (Pp_{n-2})^2 Pp_n$$

Ist $n = 2m + 1$ so folgt ebenso, da $1 - x = p_0C - PC = Pp_0$, aus 2)

$$6)\quad (p_0C)^{2m+1} - (PC)^{2m+1} = Pp_0(Pp_2)^2(Pp_4)^2 \ldots (Pp_{n-1})^2$$

Ferner nach 3) wenn $n = 2m$

$$7)\quad x^{2m} + 1 = (PC)^{2m} + (p_0C)^{2m} = (Pp_1)^2(Pp_3)^2 \ldots (Pp_{n-1})^2$$

und nach 4), wenn $n = 2m + 1$, da $x + 1 = PC + Cp_n = Pp_n$

$$8)\quad x^{2m+1} + 1 = (PC)^{2m+1} + (p_0C)^{2m+1} = (Pp_1)^2(Pp_3)^2 \ldots (Pp_{n-2})^2 Pp_n$$

Da $Pp_1 = Pp_{2n-1}$; $Pp_2 = Pp_{2n-2}$ u.s.w. so kann man, ohne die Fälle, wenn $n$ gerade oder ungerade ist, zu unterscheiden, statt der Formeln 5) und 6) auch schreiben

$$(p_0C)^n - (PC)^n = Pp_0 . Pp_2 . Pp_4 . \ldots Pp_{2n-2}$$

und statt der Formeln 7) und 8)

$$(p_0C)^n + (PC)^n = Pp_1 . Pp_3 \ldots . Pp_{2n-1}$$

Liegt der Punkt $P$ ausserhalb des Kreises, so bleiben die Formeln 7) und 8) unverändert, dagegen hat man in den Formeln 5) und 6) statt $(p_0C)^{2m} - (PC)^{2m}$ nun $(PC)^{2m} - (p_0C)^{2m}$ und statt $(p_0C)^{2m+1} - (PC)^{2m+1}$ nun $(PC)^{2m+1} - (p_0C)^{2m+1}$ zu setzen, weil nun $Pp_0 = PC - p_0C = x - 1$ und $x^2 - 1 = (PC)^2 - (p_0C)^2 = Pp_n . Pp_0$.

### 3.

Auf dieselbe Weise lässt sich auch der Ausdruck $x^n \mp A$, wo $A$ eine reelle positive Grösse bedeutet, in Faktoren zer-

legen. Setzt man nemlich $A = a^n$ wo $a$ reell und positiv ist, so ist $\overline{A^{\frac{1}{n}}} = a \,.\, \overline{1^{\frac{1}{n}}}$ (§. 113).

Indem man die vorhergehenden Betrachtungen wiederholt, findet man hieraus

$$x^{2m} - a^{2m} = (x^2 - a^2)(x^2 - 2a\cos\frac{2\pi}{2m}x + a^2)(x^2 - 2a\cos\frac{4\pi}{2m}x + a^2)\ldots$$
$$(x^2 - 2a\cos\frac{2(m-1)\pi}{2m}x + a^2)$$

$$x^{2m+1} - a^{2m+1} = (x-a)(x^2 - 2a\cos\frac{2\pi}{2m+1}x + a^2)(x^2 - 2a\cos\frac{4\pi}{2m+1}x + a^2)\ldots$$
$$(x^2 - 2a\cos\frac{2m\pi}{2m+1}x + a^2)$$

$$x^{2m} + a^{2m} = (x^2 - 2a\cos\frac{\pi}{2m}x + a^2)(x^2 - 2a\cos\frac{3\pi}{2m}x + a^2)\ldots.$$
$$(x^2 - 2a\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}x + a^2)$$

$$x^{2m+1} + a^{2m+1} = (x+a)(x^2 - 2a\cos\frac{\pi}{2m+1}x + a^2)(x^2 - 2a\cos\frac{3\pi}{2m+1}x + a^2)\ldots$$
$$(x^2 - 2a\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}x + a^2)$$

Die entsprechenden Construktionen bleiben dieselben wie oben, nur mit dem Unterschiede dass man den Halbmesser nicht $= 1$ sondern $= a$ setzen muss.

Diese geometrische Darstellung der Ausdrücke $x^n \mp a^n$ als ein Produkt von Faktoren wird der Cotesische Lehrsatz genannt, nach dem englischen Mathematiker Cotes (gest. 1716) der sie zuerst gegeben hat.

4.

Die Gleichung
$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$
in welcher $a$ und $b$ reelle (positive oder negative) Grössen sind, verwandelt sich, wenn man $x^n = y$ setzt, in die quadratische
$$y^2 + ay + b = 0$$
woraus

$$y = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = 0$$

folgt, also für $y$ wieder seinen Werth gesetzt,

9) $$x^n + \frac{a}{2} \mp \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = 0$$

Ist $\sqrt{a^2-4b}$ reell, so setze man den Ausdruck $\frac{a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2}$, je nachdem er positiv oder negativ ist, $= A$ oder $= -A$, wo $A$ eine positive Grösse ist. Die Gleichung 9) kommt also auf die oben betrachtete Gleichung $x^n \mp A = 0$ zurück, und mithin kann der erste Theil dieser Gleichung als ein Produkt von Faktoren dargestellt werden.

Ist dagegen $\sqrt{a^2-4b}$ imaginär, also $a^2-4b$ negativ, so sey $c$ eine positive Grösse und $a^2 - 4b = -c^2$ also $\frac{a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2} = \frac{a \mp ci}{2}$. Setzt man $Arc\ tg\ \frac{c}{a} = \varphi$ so hat man, je nachdem $a$ positiv oder negativ ist, wenn $m = \frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$ gesetzt wird, nach §. 106

$$\frac{a+ci}{2} = \pm m(\cos\varphi + \sin\varphi . i); \quad \frac{a-ci}{2} = \pm m(\cos\varphi - \sin\varphi . i)$$

mithin

$$[x^n + \frac{a - \sqrt{a^2-4b}}{2}]\ [x^n + \frac{a + \sqrt{a^2-4b}}{2}]$$
$$= [x^n \pm m(\cos\varphi - \sin\varphi . i)]\ [x^n \pm m(\cos\varphi + \sin\varphi . i]$$
$$= (x^n \pm m\cos\varphi)^2 + (m\sin\varphi)^2 = x^{2n} \pm 2m\cos\varphi . x^n + m^2$$

Aus 9) folgt aber

$$x^n = -\left[\frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}\right] = -\frac{a \pm ci}{2}$$

also je nachdem $a$ negativ oder positiv

$$x^n = m(\cos\varphi \pm \sin\varphi . i)$$

oder

$$x^n = -m(\cos\varphi \pm \sin\varphi . i)$$

Im ersten Falle hat man mithin

$$x = m^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} \pm \sin \frac{\varphi}{n} i\right) \overline{1^{\frac{1}{n}}} = m^{\frac{1}{n}} e^{\pm \frac{\varphi}{n} i} \cdot \overline{1^{\frac{1}{n}}}$$

im zweiten

$$x = m^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} \pm \sin \frac{\varphi}{n} i\right) \overline{(-1)^{\frac{1}{n}}} = m^{\frac{1}{n}} . e^{\pm \frac{\varphi}{n} i} \overline{(-1)^{\frac{1}{n}}}$$

also da $1^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sin \frac{2k\pi}{n} i$, wo für $k$ alle Werthe von $k = 0$ bis $k = \frac{n}{2}$ zu setzen sind, und

$(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} i$, wo für $k$ alle Werthe von $k = 0$ bis $k = \frac{n-1}{2}$ zu setzen sind, so hat man im ersten Falle

$$x = m^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\pm \frac{\varphi}{n} i} \cdot e^{\pm \frac{2k\pi}{n} i} = m^{\frac{1}{n}} e^{\pm \left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right) i}$$

oder

$$x = m^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} i\right]$$

ebenso im zweiten Falle

$$x = m^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\varphi \pm (2k+1)\pi}{n} \pm \sin \frac{\varphi \pm (2k+1)\pi}{n} i\right]$$

Im ersten Falle lässt sich also das Produkt

$[x^n - m(\cos \varphi + \sin \varphi . i)]\ [x^n - m(\cos \varphi - \sin \varphi . i]$
$= x^{2n} - 2m \cos \varphi . x^n + m^2$

in Faktoren von der Form

$x - m^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} + \sin \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} i\right]$ und von der Form $x - m^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} - \sin \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} i\right]$ zerlegen, das Produkt dieser zwei Faktoren ist aber

$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$ also lässt sich

$x^{2n} - 2m \cos \varphi . x^n + m^2$ in quadratische Faktoren von der Form $x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n} . x + m^{\frac{2}{n}}$ zerlegen. Im zweiten Falle folgt ebenso, dass man das Produkt

$$[x^n + m (\cos \varphi + \sin \varphi . i)] \; [x^n + m (\cos \varphi - \sin \varphi . i)]$$
$$= x^{2n} + 2m \cos \varphi . x^n + m^2$$

in quadratische Faktoren von der Form

$$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi \pm (2k+1)\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}} \text{ zerlegen kann.}$$

Diese Faktoren kann man aber wieder geometrisch darstellen.

Man nehme von einem Punkte $A$ des Kreises aus, einen Bogen $Ap_0 = \frac{\varphi}{n}$ und theile von $p_0$ aus den Umfang des Kreises in $2n$ gleiche Theile, so ist wieder, wie früher,

$p_0p_1 = \frac{\pi}{n}$, $p_0p_2 = \frac{2\pi}{n}$ u. s. w.

also $ACp_1 = \frac{\varphi + \pi}{n}$

$ACp_2 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}$ u. s. w. Demnach

$$Pp_1{}^2 = (PC)^2 - 2PC \, . \, p_1C \cos \frac{\varphi + \pi}{n} + (p_1C)^2$$

$$(Pp_2)^2 = (PC)^2 - 2PC \, . \, p_2C \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + (p_2C)^2$$

u. s. w.

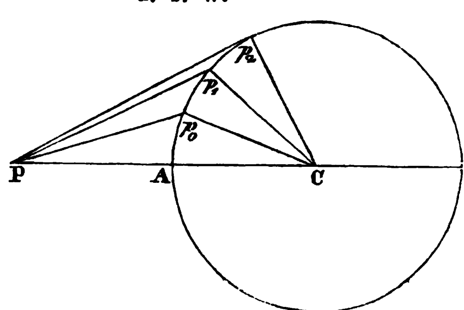
mithin, wenn man $PC = x$, $p_1C = p_2C = \ldots = m^{\frac{1}{n}}$ setzt,

$$(Pp_0)^2 = x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

$$(Pp_1)^2 = x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi + \pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

$$(Pp_2)^2 = x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

u. s. w.




wodurch die einzelnen in den Formeln

$$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

$$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

enthaltenen Ausdrücke construirt sind. Zugleich sind aber hierdurch auch die in

$$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi - 2k\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

$$x^2 - 2m^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\varphi - (2k+1)\pi}{n} x + m^{\frac{2}{n}}$$

enthaltenen Ausdrücke construirt, denn da

$$\cos \left(\frac{\varphi - 2k\pi}{n}\right) = \cos \frac{\varphi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{\varphi}{n} \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und $\cos \frac{2k\pi}{n} = \cos \left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \cos \frac{(n-k)\, 2\pi}{n}$;

$\sin \frac{2k\pi}{n} = - \sin \left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = - \sin \frac{(n-k)\, 2\pi}{n}$

so ist $\cos \left(\frac{\varphi - 2k\pi}{n}\right) = \cos \frac{\varphi + (n-k)\, 2\pi}{n}$,

ebenso $\cos \frac{\varphi - (2k+1)\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + (2(n-k) - 1)\pi}{n}$

also da $n - k$ positiv, so sind diese Werthe in den schon betrachteten enthalten.

Man hat demnach, der Punkt $P$ mag innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen,

$$x^{2n} - 2m\cos\varphi x^n + m^2 = (PC)^{2n} - 2(p_1C)^n (PC)^n \cos\varphi + (p_1C)^{2n}$$
$$= (Pp_0)^2 (Pp_2)^2 \ldots (Pp_{2n-2})^2$$
$$x^{2n} + 2m\cos\varphi x^n + m^2 = (PC)^{2n} + 2(p_1C)^n (PC)^n \cos\varphi + (p_1C)^{2n}$$
$$= (Pp_1)^2 (Pp_3)^2 \ldots (Pp_{2n-1})^2$$

Diese Darstellung von $x^{2n} \pm 2m\cos\varphi x^n + m^2$ nennt man den Moivre'schen Lehrsatz, nach dem englischen*) Mathematiker Moivre (gest. 1754); setzt man $\varphi = 0$ also $\cos\varphi = 1$ so geht $x^{2n} \pm 2m\cos\varphi x^n + m^2$ in $x^{2n} \pm 2mx^n + m^2 = (x^n \pm m)^2$ über, und man hat wieder, übereinstimmend mit dem Cotesischen Lehrsatz, wenn man die Quadratwurzeln nimmt,

$$x^n - m = (PC)^n - (p_0C)^n = Pp_0 \,.\, Pp_2 \ldots Pp_{2n-2}$$
$$x^n + m = (PC)^n + (p_0C)^n = Pp_1 \,.\, Pp_3 \ldots Pp_{2n-1}$$

wobei, wenn $P$ innerhalb des Kreises liegt, $(p_0C)^n - (PC)^n$ statt $(PC)^n - (p_0C)^n$ zu setzen ist.

## Note XII.

### Verwandlung der hypergeometrischen Reihe in einen Kettenbruch. Beweis der Irrationalität verschiedener Ausdrücke.

#### 1.

In Kap. 13 §. 158 wurde gezeigt, wie man jede Reihe in einen Kettenbruch verwandeln kann. Dies schliesst nicht aus, dass man Reihen von bestimmter Form in Kettenbrüche verwandeln kann, welche ganz anders gestaltet sind, als diejenigen, die man nach jenem Verfahren finden würde. Eine solche Verwandlung lässt sich mit der Reihe

$$1)\quad 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,.\,\gamma+1} x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{1\,.\,2\ldots r\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1} x^r + \ldots$$

*) Moivre wurde in Vitri in der Champagne 1667 geboren, brachte aber den grössten Theil seines Lebens in England zu, auch sind seine Arbeiten in englischer Sprache geschrieben.

vornehmen, welche man die **hypergeometrische** zu nennen pflegt und welche die wichtigsten in der Analysis vorkommenden Reihen als besondere Fälle enthält. Es versteht sich von selbst, dass $\gamma$ weder Null noch eine negative ganze Zahl seyn darf, weil die Reihe sonst Glieder mit dem Nenner Null enthielte; dagegen können $\alpha$ und $\beta$ jeden endlichen Werth haben, sind sie Null oder eine negative ganze Zahl, so bricht die Reihe ab und ist also eine endliche, im entgegengesetzten Falle ist sie eine unendliche.

Ist die Reihe eine unendliche, so wird sie convergiren oder divergiren, je nachdem der Zahlenwerth von $x$ grösser oder kleiner als die Einheit ist. Wenn man nemlich das $r+1$te Glied $\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r)}{1.2\ldots(r+1)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}x^{r+1}$ durch das $r$te $\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{1.2\ldots r.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1)}x^r$ dividirt, so ist der Quotient $\frac{(\alpha+r)\;(\beta+r)}{(r+1)\;(\gamma+r)}x = \frac{1+\frac{(\alpha+\beta)}{r}+\frac{\alpha\beta}{r^2}}{1+\frac{\gamma+1}{r}+\frac{\gamma}{r^2}}x.$ Nun nähert sich $\frac{1+\frac{\alpha+\beta}{r}+\frac{\alpha\beta}{r^2}}{1+\frac{\gamma+1}{r}+\frac{\gamma}{r^2}}$ mit wachsendem $r$ unbegrenzt der Einheit, die Grenze des Quotienten wird also grösser oder kleiner als die Einheit werden und mithin die Reihe divergiren oder convergiren, je nachdem der Zahlenwerth von $x$ grösser oder kleiner als die Einheit ist (§. 49).

Ist $x = 1$, so kann man den Quotienten in der Form $\frac{r^2+(\alpha+\beta)\,r+\alpha\beta}{r^2+(\gamma+1)\,r+\gamma}$ darstellen. Nach §. 67 wird also die Reihe convergiren, wenn $\gamma+1-(\alpha+\beta>1$ d. h. $\gamma>\alpha+\beta$, in allen anderen Fällen divergiren.

2.

Die Reihe 1) bleibt ungeändert, wenn man $\alpha$ und $\beta$ ver-

tauscht. Bezeichnet man diese Reihe durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ so hat man daher

2) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$$

Setzt man in der Reihe 1) $\beta + 1$ statt $\beta$ und $\gamma + 1$ statt $\gamma$, so erhält man eine neue Reihe, welche nach dem Vorhergehenden durch $F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)$ zu bezeichnen ist, und man findet $F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

$$= \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\left[1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma+2}x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2 + \ldots\right]$$

d. h.

3) $$F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$$

Hieraus folgt weiter

$$1 - \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)};$$

oder nach Formel 2), $$= \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} \frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}.$$

also

4) $$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} \frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}}$$

Setzt man in dieser Formel $\beta + 1$ statt $\alpha$, $\alpha$ statt $\beta$ und $\gamma + 1$ statt $\gamma$ so findet man

5) $$\frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3, x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}}$$

Indem man aber in 4) $\alpha + 1$ statt $\alpha$, $\beta + 1$ statt $\beta$, und $\gamma + 2$ statt $\gamma$ setzt, ergiebt sich

$$\frac{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3, x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)x}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \frac{F(\beta+2, \alpha+2, \gamma+4, x)}{F(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3, x)}}$$

nun kann man wieder $\frac{F(\beta+2, \alpha+2, \gamma+4, x)}{F(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3, x)}$ nach Form. 5) weiter entwickeln, indem man darin $\beta + 1$ statt $\beta$, $\alpha + 1$ statt $\alpha$, $\gamma + 2$ statt $\gamma$ setzt. Auf diese Weise kann man den Ausdruck 4) in einen Kettenbruch von der Form

$$6)\quad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cfrac{a_3x}{1-\ddots}}}}}$$

entwickeln. Hierbei ist

$$a_0 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)};\quad a_1 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

$$a_2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)};\quad a_3 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$$

allgemein

$$a_{2r} = \frac{(\alpha+r)(\gamma+r-\beta)}{(\gamma+2r)(\gamma+2r+1)};\quad a_{2r+1} = \frac{(\beta+r+1)(\gamma+r-\alpha+1)}{(\gamma+2r+1)(\gamma+2r+2)}$$

Bleibt man in der Entwickelung bei $a_{2r}x$ stehen, so muss man diesen Ausdruck noch mit $\frac{F(\beta+r+1,\alpha+r+1,\gamma+2r+2,x)}{F(\beta+r+1,\alpha+r,\gamma+2r+1,x)}$ multipliciren um den vollständigen Werth von $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$ zu erhalten; bleibt man dagegen bei $a_{2r+1}x$ stehen, so muss man diesen Ausdruck noch mit $\frac{F(\alpha+r+1,\beta+r+2,\gamma+2r+3,x)}{F(\alpha+r+1,\beta+r+1,\gamma+2r+2,x)}$ multipliciren. Je nachdem das Eine oder das Andere der Fall ist, hat man also

$$7)\quad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{\vdots}{\cfrac{-a_{2r-1}x}{1-a_{2r}x\dfrac{F(\beta+r+1,\alpha+r+1,\gamma+2r+2,x)}{F(\beta+r+1,\alpha+r,\gamma+2r+1,x)}}}}}}$$

oder

$$8)\ \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{\vdots}{-\cfrac{a_{2r}x}{1-a_{2r+1}x\dfrac{F(\alpha+r+1,\beta+r+2,\gamma+2r+3,x)}{F(\alpha+r+1,\beta+r+1,\gamma+2r+2,x)}}}}}}$$

### 3.

Ist $\beta = 0$ so ist $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1$, unter dieser Voraussetzung erhält man aus 7) und 8), wenn man $\gamma - 1$ statt $\gamma$ setzt,

$$9)\ F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{\vdots}{-\cfrac{a_{2r-1}x}{1-a_{2r}x\dfrac{F(r+1,\alpha+r+1,\gamma+2r+1,x)}{F(r+1,\alpha+r,\gamma+2r,x)}}}}}}$$

oder

$$10)\ F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{\vdots}{-\cfrac{a_{2r}x}{1-a_{2r+1}x\dfrac{F(\alpha+r+1,r+2,\gamma+2r+2,x)}{F(\alpha+r+1,r+1,\gamma+2r+1,x)}}}}}$$

Hier ist $a_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$, $a_1 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)}$

$$a_2 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)},\quad a_3 = 2\,\frac{(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}$$

allgemein

$$a_{2r} = \frac{(\alpha+r)(\gamma+r-1)}{(\gamma+2r-1)(\gamma+2r)},\quad a_{2r+1} = \frac{(r+1)(\gamma+r-\alpha)}{(\gamma+2r)(\gamma+2r+1)}$$

Man hat aber

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

und es ist demnach diese Reihe in den Kettenbruch 9) oder 10) verwandelt.

4.

Man kann $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ auch in einen Kettenbruch von anderer Gestalt verwandeln. Man findet nemlich

$$F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\beta-\alpha-1}{\gamma} x F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)$$

und

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x)} = 1 - \frac{\beta-\alpha-1}{\gamma} x \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x)}$$

Setzt man aber in 4) $\alpha+1$ statt $\alpha$, $\beta-1$ statt $\beta$, so findet man aus 7) und 8)

$$11)\ \frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_0 x}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{\vdots}{-a_{2r} x \dfrac{F(\beta+r, \alpha+r+2, \gamma+2r+2, x)}{F(\beta+r, \alpha+r+1, \gamma+2r+1, x)}}}}}$$

oder

$$12)\ \frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_0 x}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{\vdots}{-a_{2r+1} x \dfrac{F(\alpha+r+2,\beta+r+1,\gamma+2r+3,x)}{F(\alpha+r+2, \beta+r, \gamma+2r+2, x)}}}}}$$

wo nun

$$a_{2r} = \frac{(\alpha+r+1)(\gamma+r+1-\beta)}{(\gamma+2r)(\gamma+2r+1)};\ a_{2r+1} = \frac{(\beta+r)(\gamma+r-\alpha)}{(\gamma+2r+1)(\gamma+2r+2)}$$

milhin

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)} = 1-\cfrac{\frac{\beta-\alpha-1}{\gamma}\,x}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\,x}{1-\cfrac{\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,x}{1-\ddots}}} = 1-\cfrac{\frac{\beta-\alpha-1}{\gamma}\,x}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{a_1x}{1-\ddots}}}$$

Setzt man $\beta = 1$, also $F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x) = 1$, so folgt hieraus

$$13)\quad F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\cfrac{\frac{\alpha}{\gamma}\,x}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{\vdots}{-a_{2r}x\,\frac{F(r+1,\,\alpha+r+2,\,\gamma+2r+2,\,x)}{F(r+1,\,\alpha+r+1,\,\gamma+2r+1,\,x)}}}}$$

oder

$$14)\quad F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\cfrac{\frac{\alpha}{\gamma}\,x}{1-\cfrac{a_0x}{1-\cfrac{\vdots}{-a_{2r+1}\,x\,\frac{F(\alpha+r+2,\,r+2,\,\gamma+2r+3,\,x)}{F(\alpha+r+2,\,r+1,\,\gamma+2r+2,\,x)}}}}$$

5.

Kann man bei unbegrenzt wachsendem $r$ die Faktoren, mit welchen $a_{2r}x$ und $a_{2r+1}x$ in den Formeln 7) 8) 9) 10) 13) 14) multiplicirt sind, vernachlässigen, so wird durch dieselben $\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}$ und $F(\alpha,\ 1,\ \gamma, x)$ in einen unendlichen Kettenbruch verwandelt. In Beziehung auf die Frage, wann diese Vernachlässigung erlaubt ist, kann folgender Satz mit Nutzen angewandt werden.)

Wenn $F$ einen bestimmten endlichen Werth bedeutet und man hat

$$15)\qquad F = a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} + \cfrac{b_m}{a_m k_m}}}}$$

und der unendliche Kettenbruch

$$16)\qquad a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}}$$

convergirt, so wird bei unbegrenzt wachsendem $m$

$$F = \lim.\ a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cdots + \cfrac{b_m}{a_m}} = \lim \frac{A_m}{B_m} \quad (\S.\ 139)$$

seyn, wenn $B_m$ mit wachsendem $m$ immer grösser wird, und zugleich $a_m b_m$ ein endlicher Werth (oder Null) ist, während $k_m \gtreqless 1$ und endlich ist.

Aus 15) folgt nemlich

$$F = \frac{a_m k_m A_{m-1} + b_m A_{m-2}}{a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2}}$$

also

$$F - \frac{A_m}{B_m} = \frac{a_m k_m A_{m-1} + b_m A_{m-2}}{a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2}} - \frac{a_m A_{m-1} + b_m A_{m-2}}{a_m B_{m-1} + b_m B_{m-2}}$$

$$= \frac{a_m b_m (k_m - 1)\,[A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1}]}{(a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2})\, B_m}$$

Nun ist

$$A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1} = \left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} - \frac{A_{m-2}}{B_{m-2}}\right) B_{m-1} B_{m-2}$$

mithin

$$F - \frac{A_m}{B_m} = a_m b_m (k_m - 1)\left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} - \frac{A_{m-2}}{B_{m-2}}\right)\frac{B_{m-1}B_{m-2}}{(a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2})B_m}$$

Ist nun $k_m \overset{=}{>} 1$ so ist $a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2} \overset{=}{>} a_m B_{m-1} + b_m B_{m-2}$ d. h. $\overset{=}{>} B_m$. Da aber $B_m$ mit wachsendem $m$ immer grösser werden soll, so ist mithin

$\frac{B_{m-1}B_{m-2}}{(a_m k_m B_{m-1} + b_m B_{m-2}) B_m} < 1$ ferner ist $a_m b_m (k_m - 1)$ ein endlicher Werth. Nun wird vorausgesetzt, dass der Kettenbruch 16) convergirt, mithin nähern sich die Werthe $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ und $\frac{A_{m-2}}{B_{m-2}}$ unbegrenzt, oder es ist $\lim \left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} - \frac{A_{m-2}}{B_{m-2}}\right) = 0$, also auch $\lim \left(F - \frac{A_m}{B_m}\right) = 0$ oder

$$F = \lim \frac{A_m}{B_m}$$

Wendet man dies namentlich auf die Formeln 7) und 8) an, so sieht man dass $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$, wenn dieser Ausdruck einen bestimmten endlichen Werth hat, durch den entsprechenden, ins Unendliche verlängerten Kettenbruch ausgedrückt wird, wenn dieser Kettenbruch convergirt, die Nenner seiner Näherungswerthe wachsen, und

$$\frac{F(\beta + r + 1, \alpha + r, \gamma + 2r + 1, x)}{F(\beta + r + 1, \alpha + r + 1, \gamma + 2r + 2, x)} \text{ und}$$

$$\frac{F(\alpha + r + 1, \beta + r + 1, \gamma + 2r + 2, x)}{F(\alpha + r + 1, \beta + r + 2, \gamma + 2r + 3, x)}$$

mit wachsendem $r$ sich der Einheit oder einer endlichen Zahl, die grösser als die Einheit ist, nähern.

## 6.

Ein Beispiel liefert folgende Betrachtung.

In der Reihe

$$17)\ 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r)}{1.2\ldots(r+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}x^{r+1}$$

$$=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha^2\beta^2(1+\frac{1}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta})}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2$$

$$+\frac{\alpha^3\beta^3(1+\frac{1}{\alpha})(1+\frac{2}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta})(1+\frac{2}{\beta})}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3\ldots$$

$$+\frac{\alpha^{r+1}\beta^{r+1}(1+\frac{1}{\alpha})\ldots(1+\frac{r}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta})\ldots(1+\frac{r}{\beta})}{1.2\ldots(r+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}x^{r+1}$$

in welcher wir, der Einfachheit wegen, $\gamma$ positiv nehmen, setze man $\alpha=\beta=-a$, $x=\left(\frac{z}{2a}\right)^2$ so geht die Reihe in

$$18)\ 1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{(1-\frac{1}{a})^2}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\frac{(1-\frac{1}{a})^2(1-\frac{2}{a})^2}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^6+\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{a})^2\ldots(1-\frac{r}{a})^2}{1.2\ldots(r+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+2}$$

über. Lässt man zugleich $r$ unbegrenzt wachsen, so ist mithin die hierdurch entstehende unendliche Reihe durch $F\left(-a,-a,\gamma,\left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)$ zu bezeichnen. Diese unendliche Reihe wird aber convergiren, sobald man $a=kr$ setzt und $k>1$ nimmt. Der Quotient zweier auf einanderfolgender Glieder

$$\frac{(1-\frac{1}{a})^2(1-\frac{2}{a})^2\ldots(1-\frac{m-1}{a})^2}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\ \frac{z^{2m}}{2^{2m}}\ \text{und}$$

$$\frac{(1-\frac{1}{a})^2(1-\frac{2}{a})^2\ldots(1-\frac{m}{a})^2}{1.2\ldots(m+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m)}\ \frac{z^{2m+2}}{2^{2m+2}}$$

ist nemlich $\frac{(1-\frac{m}{a})^2}{(m+1)(\gamma+m)}\frac{z^2}{2^2}$ welcher, da $m \leqq r$ und mithin $m < a$, also auch $(1-\frac{m}{a}) < 1$, mit wachsendem $m$ unter jeden angebbaren Werth sinkt, welchen endlichen Werth auch $z$ haben mag.

Die Grenze der Reihe 18), bei unendlich wachsendem $r$, findet man durch eine ähnliche Betrachtung wie sie in §. 77 u. s. w. gebraucht worden ist.

Man bezeichne den Theil

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{(1-\frac{1}{a})^2}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4\ldots\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{a})^2\ldots\ldots(1-\frac{m-2}{a})^2}{1\,.\,2\ldots(m-1)\,\gamma\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}$$

durch $T$, bezeichnet man den Rest durch $R$ und setzt

$$R=\frac{(1-\frac{1}{a})^2\ldots(1-\frac{m-1}{a})^2}{1\,.\,2\ldots m\,.\,\gamma\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}U$$

so ist

$$U=1+\frac{(1-\frac{m}{a})^2}{(m+1)(\gamma+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{(1-\frac{m}{a})^2(1-\frac{m+1}{a})^2}{(m+1)(m+2)(\gamma+m)(\gamma+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{m}{a})^2\ldots(1-\frac{r}{a})^2}{(m+1)\ldots(r+1)(\gamma+m)\ldots(\gamma+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+2-2m}$$

Man lasse nun $r$ unbegrenzt wachsen, während $m$ denselben Werth behält. Da alle Glieder in $U$ positiv sind, so hat man

$$U<1+\frac{1}{(m+1)(\gamma+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{(m+1)(m+2)(\gamma+m)(\gamma+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\ldots,$$

$$U>1$$

Nun ist die Reihe $1+\frac{1}{(m+1)(\gamma+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots$ convergent, da der Quotient der zwei aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{1}{(m+1)\ldots(m+k)(\gamma+m)\ldots(\gamma+m+k-1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \text{ und}$$
$$\frac{1}{(m+1)\ldots(m+k+1)(\gamma+m)\ldots(\gamma+m+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2}$$

den Werth $\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(m+k+1)(\gamma+m+k)}$ hat, welcher $< 1$ ist, sobald $k > \frac{z}{2}$. Demnach hat U einen bestimmten endlichen Werth. Dieses Verhältniss bleibt dasselbe, wenn man auch $m$ unbegrenzt wachsen lässt, sobald nur $m < r$ ist, also, nach unserer Voraussetzung, um so mehr, $m < a$. Nun ist

$$\frac{1}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} < \frac{1}{[1.2\ldots(m-1)]^2}\,\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{\gamma.m}$$

Nimmt man aber $m$ beliebig gross, so ist nach §. 77

$$lim\ \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^m}{1\,.\,2\ldots(m-1)} = 0$$

also auch

$$lim\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{[1.2\ldots(m-1)]^2} = 0, \text{ umsomehr } lim\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{1.2..m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)} = 0$$

und $lim\ \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2\ldots\left(1-\frac{m-1}{a}\right)^2}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} = 0$

Da nun $U$ einen endlichen Werth hat, so folgt hieraus weiter

$$lim\ R = 0$$

und mithin nach 18)

19) $$F\left(-a, -a, \gamma, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right) = lim\ T$$

Nun ist

20) $$T < 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(m-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}$$

Man kann aber immer einen Ausdruck $h$ finden, so beschaffen dass

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{m-2}{a}\right)>1-h$$

ist (§. 77), und um so mehr jeder der Ausdrücke $\left(1-\frac{1}{a}\right)$, $\left(1-\frac{2}{a}\right)\ldots$ grösser als $1-h$ ist. Man hat demnach

$$21)\quad T>1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2+(1-h)^2\left[\frac{1}{1.2.\gamma.\gamma+1}\left(\frac{z}{2}\right)^4\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1.2\ldots(m-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}\right]$$

und da man $h$ mit wachsendem $a$ unter jede Grenze sinken lassen kann, so folgt aus 19) 20) und 21)

$$22)\quad F\left(-a,-a,\gamma,\left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)=1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{1.2.\gamma.\gamma+1}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\ldots$$

Dieselbe Reihe würde man aber erhalten haben, wenn man statt der Reihe 17) die Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\beta}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

genommen und darin $\alpha=\beta=-a$, $x=\left(\frac{z}{2a}\right)^2$ gesetzt hätte, so dass mithin der Werth ungeändert bleibt, wenn man $\alpha+1$, $\alpha+2\ldots$ statt $\alpha$ und $\beta+1$, $\beta+2,\ldots$ statt $\beta$ schreibt.

### 7.

Setzt man in Form. 17) für $x$ den Werth $\frac{zi}{2a}$, wo $i^2=-1$ (§. 87), so erhält man statt der Reihe 18) die Reihe

$$1-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4\ldots-\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2\ldots\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}{1.2\ldots(r+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+2}$$

und beweist, wie im vorhergehenden Falle, dass die Grenze dieser Reihe dieselbe ist, wie die Grenze der Reihe

$$T' = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 \cdots\cdots$$

$$- \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{m-2}{a}\right)^2}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)\,\gamma\,(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}$$

also

$$F\left(-a, -a, \gamma, \left(\frac{zi}{2a}\right)^2\right) = \lim T'$$

Behält $h$ seine frühere Bedeutung, so ist demnach (vgl. §. 77)

$$T' < 1 + \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{1.2.3.4\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}\left(\frac{z}{2}\right)^8 + \ldots$$

$$- (1-h)^2\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2 \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(m-1)\gamma\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}\right]$$

$$> (1-h)^2\left[1 + \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{1.2.3.4.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}\left(\frac{z}{2}\right)^8 + \ldots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{1.2\ldots(m-1)\gamma\ldots(\gamma+m-2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-2}\right]$$

und mithin

$$23)\quad F\left(-a, -a, \gamma, \left(\frac{zi}{2a}\right)^2\right) = \lim T' = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^6 + \ldots\ldots$$

## 8.

Setzt man in 22) für $\gamma$ die Werthe $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ so erhält man (§. 127)

$$24)\quad F\left(-a, -a, \frac{1}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$25)\quad F\left(-a, -a, \frac{3}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right) = 1 + \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2z}$$

und demnach

$$26)\qquad \frac{1}{z}\cdot\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}=\frac{F\left(-a,\,-a,\,\frac{3}{2},\,\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}{F\left(-a,\,-a,\,\frac{1}{2},\,\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}$$

Setzt man nun $F\left(-a,\,-a+1,\,\frac{3}{2},\,\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)$ statt $F\left(-a,\,-a,\,\frac{3}{2},\,\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)$, was nach dem Vorhergehenden (§. 6 dieser Note) erlaubt ist, so findet man aus Formel 6), da $a_0 x=-\dfrac{a\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}=-\frac{z^{2}}{1.3}\left(1+\frac{1}{2a}\right)$, wofür, da $a$ unbegrenzt gross ist, $-\frac{z^{2}}{3}$ gesetzt werden kann,

$$\frac{F\left(-a,-a,\frac{3}{2},\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}{F\left(-a,-a,\frac{1}{2},\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{z^{2}}{3}\cfrac{F\left(-a,-a,\frac{5}{2},\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}{F\left(-a,-a,\frac{3}{2},\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}\right)}}$$

Allgemein ist hier

$$a_{2r}x=\frac{(-a+r)\left(\frac{1}{2}+r+a\right)}{\left(\frac{1}{2}+2r\right)\left(\frac{3}{2}+2r\right)}\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}=-\frac{\left(1-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r+\frac{1}{2}}{a}\right)z^{2}}{(4r+1)(4r+3)}$$

$$a_{2r+1}x=\frac{(-a+r+1)\left(\frac{3}{2}+r+a\right)}{\left(\frac{3}{2}+2r\right)\left(\frac{5}{2}+2r\right)}\left(\frac{z}{2a}\right)^{2}=-\frac{\left(1-\frac{r+1}{a}\right)\left(1+\frac{r+\frac{3}{2}}{a}\right)z^{2}}{(4r+3)(4r+5)}$$

wofür man

$$a_{2r}\,x=-\frac{z^{2}}{(4r+1)(4r+3)},\quad a_{2r+1}\,x=-\frac{z^{2}}{(4r+3)(4r+5)}$$

setzen kann.

Unter Berücksichtigung der Formeln 7) und 8) folgt daher aus 26)

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{z^2}{\cfrac{1.3}{1+\cfrac{z^2}{\cfrac{3.5}{1+ \\ \vdots \\ +\cfrac{z^2}{(4r+1)(4r+3)} \cfrac{F(-a+r+1, -a+r+1, 2r+\frac{5}{2}, (\frac{z}{2a})^2)}{F(-a+r+1, -a+r, 2r+\frac{3}{2}, (\frac{z}{2a})^2)}}}}}}$$

oder

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{z^2}{\cfrac{3}{1+ \\ \vdots \\ +\cfrac{z^2}{(4r+3)(4r+5)} \cfrac{F(-a+r+1, -a+r+2, 2r+\frac{7}{2}, (\frac{z}{2a})^2)}{F(-a+r+1, -a+r+1, 2r+\frac{5}{2}, (\frac{z}{2a})^2)}}}}$$

Nun ist zu bemerken, dass der Werth der Reihe

$$1 + \frac{1}{\gamma} x + \frac{1}{1 \cdot 2 \, \gamma \, (\gamma + 1)} x^2 + \ldots .$$

welche für jeden endlichen positiven Werth von $x$ einen endlichen positiven Werth hat, kleiner ist als die Reihe

$$1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{\gamma^3} + \ldots$$

d. h. kleiner als $e^{\frac{x}{\gamma}}$. Da nun bei wachsendem $\gamma$

$$\lim e^{\frac{x}{\gamma}} = e^0 = 1$$

ist, so ist, unter dieser Voraussetzung, um so mehr

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\gamma} x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \, (\gamma + 1)} x^2 + \ldots\right) = 1$$

also, wenn man $x = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ setzt, nach 22) auch

$$\lim F\left(-a, -a, \gamma, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right) = 1$$

und da die Grenze dieselbe bleibt, wenn man

$F\left(-a+r+1, -a+r+1, \gamma, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)$ oder

$F\left(-a+r+1, -a+r+2, \gamma, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)$ oder auch

$F\left(-a+r+1, -a+r, \gamma, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)$ nimmt, so folgt dass hier bei unbegrenzt wachsendem $r$ die Ausdrücke

$$\frac{F(\beta+r+1, \alpha+r, \gamma+2r+1, x)}{F(\beta+r+1, \alpha+r+1, \gamma+2r+2, x)} = \frac{F\left(-a+r+1, -a+r, 2r+\frac{3}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)}{F\left(-a+r+1, -a+r+1, 2r+\frac{5}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)}$$

und

$$\frac{F(\alpha+r+1, \beta+r+1, \gamma+2r+2, x)}{F(\alpha+r+1, \beta+r+2, \gamma+2r+3, x)} = \frac{F\left(-a+r+1, -a+r+1, 2r+\frac{5}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)}{F\left(-a+r+1, -a+r+2, 2r+\frac{7}{2}, \left(\frac{z}{2a}\right)^2\right)}$$

sich unbegrenzt der Einheit nähern. Der ins Unendliche fortgesetzte Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{z^2}{\cfrac{1.3}{1+\cfrac{z^2}{\cfrac{3.5}{1+\cdots+\cfrac{z^2}{\cfrac{(4r+1)(4r+3)}{1+\cdots}}}}}}}$$

convergirt aber, wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf denselben die Regeln des §. 145 anwendet. Denn setzt man $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{z^2}{1.3}$, $b_3 = \frac{z^2}{3.5}$, $b_4 = \frac{z^2}{5.7}$ u.s.w. $a_1 = a_2 = \ldots = 1$ so geht die dortige Reihe 17) in

$$1 + 5 + 9 + 13 + \ldots$$

also in eine divergirende Reihe über. Die Nenner der Näherungswerthe dieses Kettenbruches wachsen, da er nur positive Glieder enthält, und die Theilnenner sämmtlich $= 1$ sind *).

Demnach finden hier die in §. 5 dieser Note gestellten Bedingungen statt und man hat daher

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{1.3}}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{3.5}}{1 + \ddots}}}$$

wofür man auch, indem man die Brüche aufhebt, schreiben kann

27) $$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \ddots}}}}$$

9.

Nach dem Vorhergehenden ist, bei unbegrenzt wachsendem $\gamma$,

$$\lim \left(\frac{x}{\gamma} + \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{1}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots\right) = 0$$

---

*) Die Formel 3) des §. 139 geht nemlich nun in $B_k = B_{k-1} + b_k B_{k-2}$ über, also $B_k > B_{k-1}$.

Nimmt man aber die Glieder mit abwechselnden Zeichen, so muss auch

$$\lim \left(\frac{x}{\gamma} - \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{1}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 - \frac{1}{1.2.3.4.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} x^4 + \ldots\right) = 0$$

seyn. Denn sobald $\gamma > x$ hat jedes Glied dieser Reihe einen grösseren Zahlenwerth als das folgende, der Werth dieser Reihe ist also dann (nach §. 59) grösser als $\frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{1.2.\gamma.\gamma+1}$, und kann mithin nicht negativ seyn. Da er aber jedenfalls kleiner ist als der Werth der Reihe, welche dieselben Glieder, aber alle mit positiven Zeichen, enthält, so muss er bei unbegrenzt wachsendem $\gamma$, ebenfalls Null zur Grenze haben.

Demnach ist auch

$$\lim \left(1 - \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{1.2.\gamma(\gamma+1)} - \frac{x^3}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \ldots\right) = 1$$

Setzt man hier wieder $x = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ so folgt aus 23)

$$\lim F\left(-a, -a, \gamma, \left(\frac{zi}{2a}\right)^2\right) = 1 \text{ und}$$

$$\frac{1}{zi} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{tg\, z}{z} = \frac{F\left(-a, -a, \frac{3}{2}, \left(\frac{zi}{2a}\right)^2\right)}{F\left(-a, -a, \frac{1}{2}, \left(\frac{zi}{2a}\right)^2\right)} \text{(§. 95 Form. 9 u. 10)}$$

Da nun der unendliche Kettenbruch

$$1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \ddots}}}$$

convergirt, wenn $z^2$ nicht grösser als 2 ist, und dann zugleich die Nenner der Näherungswerthe immer grösser werden, wie aus §. 154 folgt, so sind auch in diesem Falle die Bedingungen des §. 5 erfüllt und man hat

$$\frac{tg\,z}{z} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \ddots}}}}$$

oder

28) $$tg\,z = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \ddots}}}}$$

Diese Gleichung ist indessen nicht blos auf die Bedingung $z^2 \leqq 2$ eingeschränkt, sondern gilt für jeden endlichen Werth. Da nemlich die Theilnenner des Kettenbruches unbeschränkt wachsen, so kommt man immer an einen solchen, der, wie alle folgenden, den Theilzähler $z^2$ um eine Einheit oder mehr übertrifft, so dass man also den Werth von $tg\,z$ nur bis an diese Stelle zu entwickeln braucht, um von da an die obigen Schlüsse ungeändert zu wiederholen.

Man bemerke bei dieser Gelegenheit noch Folgendes. Obgleich die Ausdrücke $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ und $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ endliche Werthe haben, so wird doch, wenn der letztere Ausdruck den Werth Null hat, $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ und also auch wenn man diesen Quotienten nach 6) in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln kann, dieser Kettenbruch selbst, keinen endlichen Werth mehr haben. Dies ist z. B. der Fall, wenn man in 28) für $z$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ setzt.

Dann ist nemlich $e^{zi} + e^{-zi} = e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$, mithin $tg\,z = \infty$

und

$$\infty = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \ddots}}} = \cfrac{\frac{\pi}{2}}{1 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5 - \ddots}}}$$

oder nach Aufhebung der Brüche

$$\infty = \cfrac{\pi}{2 - \cfrac{\pi^2}{6 - \cfrac{\pi^2}{10 - \cfrac{\pi^2}{14 - \ddots}}}}$$

Hieraus folgt wieder

$$2 - \cfrac{\pi^2}{6 - \cfrac{\pi^2}{10 - \cfrac{\pi^2}{14 - \ddots}}} = 0$$

oder

29) $$2 = \cfrac{\pi^2}{6 - \cfrac{\pi^2}{10 - \cfrac{\pi^2}{14 - \ddots}}}$$

Hätte man in 28) für $z$ den Werth $\pi$ gesetzt, so fände man, da $tg\, \pi = 0$

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7}}}}$$

folglich

$$\infty = 1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}}$$

und daher

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}$$

oder

30) $$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}$$

10.

Die Kettenbrüche 27) und 28) sind einzelne Fälle aus einer Gattung Kettenbrüche, welche eine sehr merkwürdige Eigenschaft hat. Wenn nemlich in einem unendlichen Kettenbruche

31) $$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_m}{a_m + \ddots}}}$$

die Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positive ganze Zahlen sind und es ist allgemein $b_m \leqq a_m$, so kann der Kettenbruch keinen rationalen Werth haben. Wäre der Werth desselben rational, so könnte man

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}} = \frac{B}{A}$$

setzen, wo $B$ und $A$ zwei ganze Zahlen sind. Da nach der

Voraussetzung $b_1$ höchstens $= a_1$ ist, so ist $\frac{B}{A}$ ein ächter Bruch, also $B < A$ und zugleich $\frac{B}{A} < \frac{b_1}{a_1}$. Hieraus folgt, dass $\frac{b_1}{a_1} - \frac{B}{A} = \frac{b_1 A - a_1 B}{a_1 A}$ einen positiven Werth hat, und setzt man $b_1 A - a_1 B = C$, so ist $C$ eine ganze positive Zahl. Aus $b_1 A = a_1 B + C$ folgt aber $\frac{1}{A} = \frac{b_1}{a_1 B + C}$ oder $\frac{B}{A} = \frac{b_1}{a_1 + \frac{C}{B}}$. Mithin $\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}$ woraus wieder $C < B$ und $\frac{C}{B} < \frac{b_2}{a_2}$ folgt. Setzt man $b_2 B - a_2 C = D$ so muss wieder $D$ eine ganze positive Zahl seyn und man findet wieder

$$\frac{D}{C} = \frac{b_3}{a_3 + \ddots}$$

also $D < C$ und $\frac{D}{C} < \frac{b_3}{a_3}$. Setzt man diese Betrachtung fort, so sieht man, dass man auf diese Weise von der bestimmten ganzen positiven Zahl $A$ ausgehend, eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen erhielte, von denen jede folgende kleiner als die vorhergehende wäre, was nicht seyn kann. Demnach kann auch der Kettenbruch 31) nicht rational seyn.

Auch in dem Falle, wenn die Bedingung $b_m \overline{\leqq} a_m$ nicht schon bei den ersten Theilzählern statt findet, sondern erst von einem bestimmten Theilzähler $b_k$ an, ist der Werth des Kettenbruches ein irrationaler. Denn man setze $\frac{b_k}{a_k + \ddots} = \frac{1}{R}$ so ist $R$ nach dem Vorhergehenden irrational. Nun ist, wenn man $\cfrac{b_1}{a_1 + \cdots + \cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}}} = \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\cfrac{b_1}{a_1 + \cdots + \cfrac{b_{k-2}}{a_{k-2}}} = \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}}$ setzt, der Werth des

Kettenbruches 31) nach §. 139

$$\frac{R \,.\, A_{k-1} + A_{k-2}}{R \,.\, B_{k-1} + B_{k-2}}$$

Hätte also dieser Kettenbruch den rationalen Werth $\frac{B}{A}$ so hätte man

$$\frac{B}{A} = \frac{R \,.\, A_{k-1} + A_{k-2}}{R \,.\, B_{k-1} + B_{k-2}}$$

woraus

$$R = \frac{AA_{k-2} - BB_{k-2}}{BB_{k-1} - AA_{k-1}}$$

folgte, d. h. $R$ müsste ebenfalls einen rationalen Werth haben, gegen die Voraussetzung.

Sind wieder in dem Kettenbruche

32) $$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ddots}}$$

sämmtliche Theilzähler und Theilnenner ganze positive Zahlen, und ist allgemein $b_m < a_m$ (also höchstens $b_m = a_m - 1$), so kann der Kettenbruch keinen rationalen Werth haben, ausgenommen, wenn allgemein, von irgend einem Theilzähler an, $b_m = a_m - 1$ ist.

Findet nemlich der Ausnahmefall nicht statt, so ist (§. 154)

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ddots}} \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \qquad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}} \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \text{ u. s. w.}$$

Hätte nun der Kettenbruch 32) einen rationalen Werth, so könnte man diesen $= \frac{B}{A}$ setzen, wo $A$ und $B$ ganze positive Zahlen sind und $B < A$. Nun ist $\frac{B}{A} > \frac{b_1}{a_1}$, man setze daher $a_1 B - b_1 A = C$, so ist $C$ eine ganze positive Zahl.

Zugleich folgt hieraus $\frac{1}{A} = \frac{b_1}{a_1 B - C}$ oder $\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{C}{B}}$

also
$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}}$$

und $C < B$. Auf diese Weise erhielte man also wieder, von der bestimmten ganzen positiven Zahl $A$ ausgehend, eine unendliche Reihe abnehmender ganzer positiver Zahlen. Der Kettenbruch 32) muss daher einen irrationalen Werth haben.

Wäre dagegen von irgend einem Theilzähler $b_k$ an, allgemein $b_m = a_m - 1$ so hätte man (§. 154)

$$\cfrac{b_k}{a_k - \cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1} - \ddots}} = 1$$

mithin kann alsdann auch der Kettenbruch 32) keinen irrationalen Werth haben.

Auch hier kann man wieder, wie im früheren Falle, beweisen, dass der Werth des Kettenbruches 32) auch dann noch irrational ist, wenn nur von einem gewissen Theilzähler $b_k$ an, allgemein $b_m < a_m$ und nicht zugleich allgemein $b_m = a_m - 1$ ist.

11.

Es ergiebt sich hieraus, dass $\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ für jeden endlichen rationalen Werth von $z$ irrational seyn muss. Denn setzt man $z = \frac{p}{q}$, wo $p$ und $q$ ganze Zahlen sind und $q$ auch $= 1$ seyn kann, so folgt aus 27)

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{p}{q + \cfrac{p^2}{3q + \cfrac{p^2}{5q + \cfrac{p^2}{7q + \ddots}}}},$$